David Michel
david.michel@ens-rennes.fr
perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel

TP4 : Exercices

$\boxed{\text{Q.1}}$ On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \dfrac{1}{1+u_k} \end{cases}$$

a. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n et qui affiche la valeur de u_n.
b. On vérifiera que $u_{10} = \frac{89}{144} \approx 0,61805\ldots$.
c. Donner une valeur approchée de u_{20}.
d. Conjecturer une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q.2}}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln u_n \end{cases}$$

On montre facilement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Écrire une fonction qui prend en paramètre la valeur de u_0 et renvoie la première valeur de n telle que $u_n \geq 10^5$.

$\boxed{\text{Q.3}}$ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ u_n = \exp(-u_{n-1}). \end{cases}$$

On montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique réel ℓ tel que $\ell = e^{-\ell}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ℓ est dans l'intervalle d'extrémités u_{n-1} et u_n. Écrire un programme qui demande un réel $\varepsilon > 0$ à l'utilisateur et affiche les deux premiers termes u_{n-1} et u_n tels que $|u_{n-1} - u_n| \leq \varepsilon$.
Indication : on utilisera la fonction **abs(x)** *qui renvoie la valeur absolue de la valeur de la variable* **x**.
On aura alors déterminé ℓ à ε près.
Se rendre à l'adresse perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel/TP4Q3.sce et télécharger le fichier. L'exécuter dans Scilab.

$\boxed{\text{Q.4}}$ Soit u la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 1/2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1}(1 + u_{n+1} - u_n).$$

On peut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers un réel $\ell \in [0,1]$ et que

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq u_n - \ell \leq 2(u_{n-1} - u_n).$$

Écrire un programme qui lit un réel $\varepsilon > 0$, calcule u_n jusqu'à ce que $u_{n-1} - u_n \leq \varepsilon$ et affiche le dernier u_k calculé. Le nombre affiché sera une approximation de ℓ à 2ε près.
Se rendre à l'adresse perso.eleves.ens-rennes.fr/people/David.Michel/TP4Q4.sce et télécharger le fichier. L'exécuter dans Scilab.