Équation de la chaleur dans une barre

H. Queffélec, C. Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, 4[e] édition, Dunod. Théorème VI.7, page 109.

Recasage : 209, 222, 241, 256.

On considère le problème suivant : trouver une fonction u telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2_1(Q) && (1)\\ \partial_t u - \partial^2_{xx} u &= 0 \qquad \text{sur } Q && (2)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0 \qquad t \geq 0 && (3)\\ u(x,0) &= h(x) \quad x \in [0,L]. && (4) \end{aligned}$$

où $h \in \mathcal{C}^1([0,L])$ telle que $h(0) = h(L) = 0$, et $\mathcal{C}^2_1(Q)$ est l'ensemble des fonctions de (x,t) dérivables en t et deux fois dérivables en x.

Montrons que $(1) - (4)$ admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q.

On cherche u de la forme $u(x,t) = f(x)g(t)$. Alors (2) impose

$$\forall (x,t) \in Q, \qquad g'(t)f(x) = f''(x)g(t).$$

En supposant que u ne s'annule pas sur Q, on en déduit qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in Q, \qquad \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

$\star$ 1[er] cas : $\lambda > 0$. Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [0,L]$, $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Mais (3) impose

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B &=& 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} &=& 0. \end{array} \right.$$

Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}L} & e^{-\sqrt{\lambda}L} \end{vmatrix} = -2\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}L) \neq 0$, on en déduit que $A = B = 0 = u(x,t)$ ce qui contredit l'hypothèse.

$\star$ 2[e] cas : $\lambda = 0$. Alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [0,L]$, $f(x) = Ax + B$. Mais (3) impose $B = 0$ et $A = 0$: contradiction.

Ainsi, $\lambda = -\xi^2$ avec $\xi \in \mathbb{R}$. Il existe donc $(A,B) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ tel que :

$$\forall (x,t) \in Q, \qquad f(x) = A\cos\xi x + B\sin\xi x \qquad g(t) = e^{-\xi^2 t}.$$

La condition (3) impose $A = 0$ et $B \sin\xi L = 0$ d'où, $\xi \in \dfrac{\pi}{L}\mathbb{Z}$.

On a donc une famille de solutions possibles pour (1)-(3) :

$$\forall (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad u_n : (x,t) \in \overline{Q} \mapsto b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right).$$

On cherche désormais à remplir la condition (4), en s'appuyant sur la linéarité de l'équation.

Soit $\widetilde{h}$ la fonction $2L$-périodique, impaire, telle que $\widetilde{h}_{|[0,L]} = h$. Comme $h(0) = h(L) = 0$, $\widetilde{h}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^1$ par morceaux. Sa série de Fourier converge donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widetilde{h}$. Comme $\widetilde{h}$ est impaire, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$ et la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On définit :

$$u : (x,t) \in \overline{Q} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) =: \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t). \tag{5}$$

Comme les $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont continues et la série converge uniformément, u est continue sur $\overline{Q}$. Montrons qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur Q et qu'on peut dériver terme à terme. Les (u_n) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Q et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\forall (x,t) \in [0,L] \times [\varepsilon, +\infty[, \qquad |\partial^\alpha u_n(x,t)| \leq C_k |b_n| n^{2k} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente, uniformément en (t,x). D'après le théorème de dérivation, u est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur Q et on peut dériver terme à terme.

Ainsi,

— u vérifie (1).

— On vérifie que $\partial_t u - \partial^2_{xx} u = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\partial_t u_n - \partial^2_{xx} u_n) = 0$ donc u vérifie (2).

— si $t \geq 0$, $u(0,t) = u(0,L) = 0$ donc u vérifie (3).

— si $x \in [0,L]$, $u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \widetilde{h}(x) = h(x)$ donc u vérifie (4).

On a donc exhibé une solution u à l'équation de la chaleur, de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'intérieur de la barre juste après l'instant initial.

Y-a-t-il unicité ? Démontrons le lemme suivant.

Lemme 1 (*Principe du maximum*)

Soit $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^2_1(Q)$ telle que $Pu(x,t) \geq 0$ sur Q, où $P = \partial^2_{xx} - \partial_t$. Soient $T > 0$ et $K = [0,L] \times [0,T]$. Alors

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

$\triangleright$ Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon : (x,t) \in \overline{Q} \mapsto u(x,t) + \varepsilon x^2$. Alors $Pu_\varepsilon = Pu + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon$ sur Q. Par ailleurs, soit $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in K$ tel que $u_\varepsilon(m_\varepsilon) = \max_K u$.

Supposons par l'absurde que $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \notin K \cap \partial Q$.

$\star$ Comme $0 < x_\varepsilon < L$, $\partial_x u_\varepsilon(m_\varepsilon) = 0$ et $\partial^2_{xx} u_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$.

$\star$ Comme $0 < t_\varepsilon \leq T$, $\partial_t u_\varepsilon(m_\varepsilon) = \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u_\varepsilon(m_\varepsilon)}{-h} \geq 00$.

Ainsi, $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$ ce qui contredit $Pu_\varepsilon \geq 2\varepsilon$. Donc $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ et

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\varepsilon = \sup_{K\cap\partial Q} u_\varepsilon \leq \sup_{K \cap \partial Q} u + \varepsilon L^2.$$

À la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat car $\sup_K u \geq \sup_{K\cap\partial Q} u$. □

Soit désormais deux solutions u, v de (1)-(4). Posons $w = v - u$. Alors w vérifie (1), (2) et

$$\forall (x,t) \in \partial Q, \qquad w(x,t) = 0.$$

Soit $T > 0$. Comme de plus $Pw = 0$ sur Q, d'après le principe du maximum,

$$\forall x \in [0,L], \qquad w(x,T) \leq 0.$$

De même, $P(-w) = 0$ sur Q donc $-w(\cdot, T) \leq 0$. Ainsi, $w(\cdot, T) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $T > 0$, $w = 0$ sur Q.

On a donc montré le théorème suivant.

Théorème 2

Le problème (1)-(4) admet une unique solution u, et $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q}) \cap \mathcal{C}^\infty(Q)$ est donnée par (5).