Décomposition de Dunford

X. Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, 2e édition, Ellipses. Théorème 1 page 175, proposition 1 page 194, théorème 3 page 195

Recasage : 153, 154, 157

Lemme 1

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in K[X]$. Notons $P = P_1 \cdots P_s$ avec $P_1, \dots, P_s$ premiers entre eux deux à deux, pour tout i, $E_i = \operatorname{Ker}(P_i(f))$. Alors, $\operatorname{Ker} P(f) = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ et, pour tout i, le projecteur de la somme directe sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ est un polynôme en f.

▷ Montrons le résultat par récurrence sur $s \geq 2$.

– $s = 2$. Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $U_1, U_2 \in K[X]$ tels que

$$U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1.$$

En particulier,

$$\forall x \in E, \qquad U_1(f) \circ P_1(f)(x) + U_2(f) \circ P_2(f)(x) = x. \tag{$*$}$$

$\star$ Soit $x \in E_1 \cap E_2$. D'après $(*)$, on a donc $x = 0$. Ainsi, E_1 et E_2 sont en somme directe. Notons $p_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$ et $p_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_2$ les projecteurs associés.

$\star$ Soit $x \in \operatorname{Ker} P(f)$. On a

$$P_2(f)(U_1(f) \circ P_1(f)(x)) = U_1(f) \circ P(f)(x) = 0$$

et, de même, $P_1(f)(U_2(f) \circ P_2(f))(x) = 0$ donc $\operatorname{Ker} P(f) \subset E_1 \oplus E_2$.

$\star$ Soit $x = p_1(x) + p_2(x) \in E_1 \oplus E_2$. Alors

$$P(f)(x) = P_2(f) \circ P_1(f)(p_1(x)) + P_1(f) \circ P_2(f)(p_2(x)) = 0.$$

Ainsi, $E_1 \oplus E_2 \subset \operatorname{Ker} P(f)$.

On a donc montré que

$$\operatorname{Ker} P(f) = E_1 \oplus E_2$$

ainsi que, grâce à $(*)$ et $\star_2$, $p_1 = U_2(f) \circ P_2(f)$ et $p_2 = U_1(f) \circ P_1(f)$.

– $s \to s+1$. Si $P = P_1 \cdots P_s P_{s+1}$ avec $P_1, \dots, P_{s+1}$ premiers entre eux deux à deux. En posant $Q_1 = P_1 \cdots P_s$ et $Q_2 = P_{s+1}$, on $P = Q_1 Q_2$ avec Q_1 et Q_2 premiers entre eux. D'après le cas précédent, et par hypothèse de récurrence,

$$\operatorname{Ker} P(f) = (E_1 \oplus \cdots \oplus E_s) \oplus E_{s+1}$$

et, pour tout $i \in [\![1, s+1]\!]$, si $\displaystyle\sum_{k=1}^{s+1} U_k \prod_{j \neq k} P_j = 1$.

$$p_i : \begin{array}{rcl} E_1 \oplus \cdots \oplus E_{s+1} & \to & E_i \\ x & \mapsto & \left(U_i(f) \displaystyle\prod_{j \neq i} P_j(f) \right)(x) \end{array}$$

□

Théorème 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que χ_f est scindé. Il existe un unique couple $(d, n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que :
(i) d est diagonalisable et n est nilpotent,
(ii) $f = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

▷ – *Étape 1 : Existence.* Notons $\chi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_i}$ et, pour tout i, $N_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}$. Avec les notations du lemme, on dispose d'une famille de projecteurs $p_i = P_i(f)$ sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$. Posons alors $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E) p_i$. Par construction, d est diagonalisable et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad n^p = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^p p_i.$$

Or, pour $p = \max m_i$, on a

$$(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^p p_i = [(X - \lambda_i)^p P_i](f) = 0$$

car $\chi_f | (X - \lambda_i)^p P_i$. Donc $n^p = 0$. Comme les p_i sont des polynômes en f, d et n également. En particulier, ils commutent.

– *Étape 2 : Unicité.* Soit $(d', n') \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifiant (i) et (ii). d' et n' commutent donc ils commutent avec $d' + n' = f$. Or d et n sont des polynômes en f. Donc d, n, d', n' commutent. Alors, d et d' sont diagonalisables dans une même base, donc $d - d'$ est diagonalisable. Or $d - d' = n' - n$ est nilpotent. Donc $d - d' = n' - n = 0$ *ie.* $d = d'$ et $n = n'$. □