Ellipsoïde de John-Loewner

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 3*, 2e édition, Cassini. Exercice 3.37 page 229

Recasage : 152, 160, 170, 171, 203, 219, 253.

Théorème 1

Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

$\triangleright$ – *Étape 1 : Calcul du volume d'un ellipsoïde.* Un ellipsoïde a pour équation $q(x) \leq 1$ où $q \in Q^{++}$ (1). Pour $q \in Q^{++}$ on note donc $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n,\ q(x) \leq 1\}$. En considérant une base $\mathcal{B}$ orthonormée telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2,$$

par changement de base orthonormée, on obtient

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = \int_{q(x)\leq 1} \mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_{a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2\leq 1} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & \left(\dfrac{x_1}{\sqrt{a_1}},\ldots,\dfrac{x_n}{\sqrt{a_n}}\right) \end{array}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Par la formule du changement de variables, on a :

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = \int_{\phi(\{\|x\|_2\leq\}1)} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{1}{\sqrt{a_1\cdots a_n}}\int_{\|x\|_2\leq 1} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

En notant $D(q) = \det(q) = \sqrt{a_1\cdots a_n}$ (indépendant de la base orthonormée) et $V_0 = \mathrm{Vol}(\{\|x\|_2 \leq 1\})$, on a donc

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_q) = \frac{V_0}{D(q)}.$$

On va donc montrer qu'il existe une unique forme quadratique $q \in Q^{++}$ maximisant $D(q)$ avec $\forall x \in K,\ q(x) \leq 1$.

– *Étape 2 : Existence.* On munit Q de la norme

$$N : q \in Q \mapsto \sup_{\|x\|=1} |q(x)|$$

et on définit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{q \in Q^+,\ \forall x \in K, q(x) \leq 1\}.$$

$\star$ $\mathcal{A}$ est non vide. En effet, comme K est compact, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in K,\ \|x\| \leq M$. Alors, en définissant q par $q(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$, on a bien $q \in \mathcal{A}$.

$\star$ $\mathcal{A}$ est fermé. En effet, si $(q_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ converge vers $q \in Q$, alors, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad |q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n)\,\|x\|^2$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} q(x)$. On en déduit que $q \in \mathcal{A}$.

$\star$ $\mathcal{A}$ est borné. En effet, K est d'intérieur non vide donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset K$. Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leq r$, on a $a + x \in K$ donc $q(a+x) \leq 1$ et donc, par l'inégalité de Minkowski ($q \in Q^+$), on a :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(a+x-a)} \leq \sqrt{q(a+x)} + \underbrace{\sqrt{q(-a)}}_{\sqrt{q(a)}} \leq 2$$

1. On note Q, Q^+, Q^{++} l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, respectivement des formes quadratiques positives, respectivement des formes quadratiques définies positives.

donc $q(x) \leq 4$. Alors, si $\|x\| \leq 1$, on a :

$$q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$$

donc $N(q) \leq \dfrac{4}{r^2}$.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est un compact non vide. Comme D est continue, elle y atteint un maximum en $q_0 \in \mathcal{A}$. Comme $D\left(x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2}\right) > 0$, on a $D(q_0) > 0$ donc $q_0 \in Q^{++}$.

Étape 3 : Unicité. $\mathcal{A}$ est convexe donc si $q \in \mathcal{A}$ alors $\dfrac{q+q_0}{2} \in \mathcal{A}$. Supposons que $D(q) = D(q_0)$. Alors $q \in Q^{++}$ et par stricte log-concavité de det sur Q^{++}, on a

$$D\left(\frac{q+q_0}{2}\right) \geq \sqrt{D(q)}\sqrt{D(q_0)} = D(q_0)$$

donc il y a égalité dans cette inégalité, donc $q = q_0$. □

Lemme 2

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

avec égalité si et seulement si $A = B$ ou $\alpha\beta = 0$.

▷ – *Étape 1 : Pseudo-réduction simultanée.* A est définie positive donc elle définit un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, B définit une forme quadratique qui peut s'écrire $x \mapsto \langle x, f(x) \rangle$ où $f = f^*$. Il existe alors une base orthonormée $\mathcal{B}$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telle que $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale réelle. En notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$^tQAQ = I_n \qquad \text{et} \qquad ^tQBQ = D.$$

En notant $P = Q^{-1}$, on a $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPBP$.

– *Étape 2 : Conclusion* On a

$$(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2\alpha + 2\beta} (\det D)^\beta = (\det P)^2 (\det D)^\beta$$

$$\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$$

donc il suffit de montrer que $\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta$ c'est-à-dire que

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En prenant le log[1], cela équivaut à

$$\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i.$$

Or $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln 1 + \beta \ln \lambda_i = \beta \ln \lambda_i$ par concavité de ln, d'où le résultat en sommant.

Si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$, alors un des λ_i est différent de 1 donc une des inégalité ci-dessus est stricte, donc l'inégalité est stricte. □

1. Les λ_i sont strictement positifs car f défini positif.