Formule de Poisson pour les groupes

G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses. Théorème 3.2 page 44.

Recasage : 110.

Théorème 1

Soient G un groupe abélien fini et $H \subset G$ un sous-groupe. Pour $f : G \to \mathbb{C}$ on a :

$$\forall g \in G, \qquad \sum_{h \in H} f(gh) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\sharp} \widehat{f}(\overline{\chi})\chi(g)$$

où $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$ est la transformée de Fourier de f et $H^\sharp = \{\chi \in \widehat{G},\ \chi(H) = \{1\}\}$.

▷ Soit S un système de représentants de $G/_H$ dans G. On note gH l'image de $g \in S$ dans $G/_H$. Posons

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \displaystyle\sum_{h \in H} f(gh). \end{array}$$

Pour $g \in S$ et $g' \in gH$, disons $g' = gh'$ avec $h' \in H$, on a :

$$\widetilde{f}(g') = \sum_{h \in H} f(gh'h) = \sum_{h \in H} f(gh) = \widetilde{f}(g)$$

car $h \in H \mapsto h'h \in H$ est bijective. On peut donc quotienter et définir

$$F : \begin{array}{ccc} G/_H & \to & \mathbb{C} \\ gH & \to & \displaystyle\sum_{h \in H} f(gh). \end{array}$$

Décomposons F en série de Fourier :

$$\forall g \in S, \qquad F(gH) = \sum_{\chi \in \widehat{G/H}} \langle F, \chi \rangle \chi(gH)$$

où

$$\langle F, \chi \rangle = \frac{1}{|G/_H|} \sum_{g \in S} F(gH)\overline{\chi(gH)} = \frac{|H|}{|G|} \sum_{g \in S} \sum_{h \in H} f(gh) \underbrace{\overline{\chi(gH)}}_{\overline{\chi(ghH)}}$$

Or $(g, h) \in S \times H \mapsto gh \in G$ est bijective et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \widehat{G/_H} & \to & H^\sharp \\ \chi & \mapsto & \widetilde{\chi} : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \chi(gH) \end{array} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes donc

$$\langle F, \chi \rangle = \frac{|H|}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{\varphi(\chi)(g)} = \frac{|H|}{|G|} \widehat{f}(\overline{\varphi(\chi)})$$

et :

$$\forall g \in S, \qquad F(gH) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G/H}} \widehat{f}(\overline{\varphi(\chi)})\varphi(\chi)(g) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\sharp} \widehat{f}(\overline{\chi})\chi(g).$$

On en déduit bien

$$\forall g \in G, \qquad \sum_{h \in H} f(gh) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\sharp} \widehat{f}(\overline{\chi})\chi(g).$$

$\square$

Remarque : Cela semble être utile dans le cas $G = \mathbb{F}_2^k$ et trouver des applications en codes correcteurs...

On a utilisé le lemme suivant.

Lemme 2

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \widehat{G/H} & \to & H^\sharp \\ \chi & \mapsto & \widetilde{\chi} : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \chi(gH) \end{array} \end{array}$$ *est un isomorphisme de groupes.*

$\triangleright$ – φ est bien défini : si $h \in H$ et $\chi \in \widehat{G/H}$ alors $\widetilde{\chi}(h) = \chi(H) = 1$ donc $\varphi\left(\widehat{G/H}\right) \subset H^\sharp$.

– φ est un morphisme de groupes : si $\chi, \chi' \in \widehat{G/H}$ alors

$$\forall g \in G, \qquad \varphi(\chi\chi')(g) = \chi\chi'(gH) = \chi(gH)\chi'(gH) = \varphi(\chi)(g)\varphi(\chi')(g).$$

– φ est injective : si $\varphi(\chi) = 1_{G\to\mathbb{C}}$ alors $\chi = \mathbf{1}_{G/H\to\mathbb{C}}$ car $\{gH, g \in S\}$ forment une partition de G.

– φ est surjective : si $\widetilde{\chi} \in H^\sharp$ alors $H \subset \operatorname{Ker}\widetilde{\chi}$ donc on peut quotienter et définir $\chi(gH) = \widetilde{\chi}(g)$ et on a bien $\chi \in \widehat{G/H}$.
Ainsi, φ est un isomorphisme de groupes. $\square$