Méthode du gradient à pas optimal

J.-B. Hirriat-Urruty, *Optimisation et analyse convexe*, EDP Sciences. Exercice I.9 page 17 pour le lemme 1.
Cours de Thibaut Deheuvels (ENS Rennes), pour le théorème 2.

Recasage : 158, 162, 181, 215, 219, 229, 233, 253.

Lemme 1 (*Kantorovitch*)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^4 \leq \langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$$

où $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ sont les valeurs propres de A.

$\triangleright$ Par homogénéité, il suffit de montrer le résultat pour $\|x\| = 1$. De plus, on peut supposer $\lambda_1 > \lambda_n$ car sinon le résultat est immédiat.

– Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Delta$ et ${}^tPA^{-1}P = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \Delta^{-1}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle = \langle \Delta(Px), Px\rangle \langle \Delta^{-1}(Px), Px\rangle.$$

En effectuant le changement de variables $x \mapsto Px$, il suffit de montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n,\ \|y\| = 1, \qquad 1 \leq \langle \Delta y, y\rangle\langle \Delta^{-1}y, y\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2.$$

– Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note M_k le point de coordonnées $\left(\lambda_k, \frac{1}{\lambda_k}\right)$. Soit M le barycentre des points M_k affectés des coefficients y_k^2. Alors M a pour coordonnées

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2, \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{\lambda_k}\right) = \left(\langle \Delta y, y\rangle, \langle \Delta^{-1}y, y\rangle\right).$$

Tous les M_k sont dans l'intersection de l'épigraphe de $u \mapsto u^{-1}$ et du demi-plan inférieur délimité par la droite (M_1M_n), qui est convexe, donc M est aussi dans ce domaine. On peut donc borner l'ordonnée de M :

$$\frac{1}{\langle \Delta y, \Delta y\rangle} \leq \langle \Delta^{-1}y, y\rangle \leq \frac{-1}{\lambda_1\lambda_n}\langle \Delta y, y\rangle + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_n}$$

d'où

$$1 \leq \langle \Delta y, y\rangle\langle \Delta^{-1}y, y\rangle \leq \frac{\langle \Delta y, y\rangle(\lambda_n + \lambda_1 - \langle \Delta y, y\rangle)}{\lambda_1\lambda_n}.$$

Or la fonction $u \mapsto \frac{u(\lambda_1 + \lambda_n - u)}{\lambda_1\lambda_n}$ atteint son maximum en $u = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}$ et on obtient

$$1 \leq \langle \Delta y, y\rangle\langle \Delta^{-1}y, y\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2.$$

□

Méthode du gradient à pas optimal On veut minimiser $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ où $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour cela, on se donne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on construit par récurrence la suite $(x_k)_{k\geq 0}$. Supposons x_k défini. Alors si $d_k = -\nabla f(x_k) = 0$ alors x_k est un minimum et on s'arrête. Sinon, on définit ρ_k l'unique réel positif minimisant $t \mapsto f(x_k + \rho d_k)$ et on pose $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$.

Théorème 2

f a un unique minimum, atteint en x^*.. Notons $\kappa_A = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ le conditionnement de A. Alors, pour tout

$k \in \mathbb{N}$,

$$\|x_k - x^*\| \leq \sqrt{\kappa_A}\left(\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_A + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|.$$

▷ – *Étape 1 : détermination du pas optimal.* On a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x_{k+1}) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} f(x_k + \rho d_k)$$

donc $\langle \nabla f(x_{k+1}), d_k \rangle = 0$ d'où $\langle d_{k+1}, d_k \rangle = 0$ et $\langle A(x_k + \rho d_k) - b, d_k \rangle = 0$ *ie.* $\langle -d_k + \rho A d_k, d_k \rangle = 0$ d'où

$$\rho_k = \frac{\|d_k\|^2}{\langle A d_k, d_k \rangle}.$$

– *Étape 2 : estimation de l'erreur.* On pose $e_k = x_k - x^*$. On a alors

$$\lambda_n \|e_k\|^2 \leq \langle A e_k, e_k \rangle \leq \lambda_1 \|e_k\|^2.$$

De plus, $Ae_k = Ax_k - b - (Ax^* - b) = -d_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\langle A e_{k+1}, e_{k+1} \rangle &= \langle A e_{k+1}, e_k + \rho_k d_k \rangle \\
&= \langle A e_{k+1}, e_k \rangle \\
&= \langle A e_k, e_k \rangle + \rho_k \langle A d_k, e_k \rangle \\
&= \langle A e_k, e_k \rangle \left(1 + \frac{\|d_k\|^2}{\langle A d_k, d_k \rangle} \frac{\langle A d_k, e_k \rangle}{\langle A e_k, e_k \rangle}\right) \\
&= \langle A e_k, e_k \rangle \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle A d_k, d_k \rangle \langle A^{-1} d_k, d_k \rangle}\right) \\
&\underset{\text{Kantorovitch}}{\leq} \langle A e_k, e_k \rangle \left(1 - \frac{4\lambda_1 \lambda_n}{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}\right) \\
&\leq \langle A e_k, e_k \rangle \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^2 \\
&\leq \langle A e_k, e_k \rangle \left(\frac{\kappa_A - 1}{\kappa_A + 1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \langle A e_k, e_k \rangle \leq \left(\frac{\kappa_A - 1}{\kappa_A + 1}\right)^{2k} \langle A e_0, e_0 \rangle$$

d'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k - x^*\|^2 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_n}\left(\frac{\kappa_A - 1}{\kappa_A + 1}\right)^{2k} \|x_0 - x^*\|^2$$

d'où le résultat. □