Image de l'exponentielle

M. Zavidovique, *Un Max de Math*, Calvage & Mounet. Problème 9 page 48.

Recasage : 156, 204.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Alors* $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

$\triangleright$ – *Étape 1 :* $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ L'inclusion $\subset$ est évidente. Si $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors, M^{-1} comme est un polynôme en M, c'est bien un polynôme en A.

– *Étape 2 :* $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$. En effet, si $M = \exp(N)$ avec $N \in \mathbb{C}[A]$ alors $I_n = \exp(N)\exp(-N) = M\exp(-N)$ donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus, $\mathbb{C}[A]$ est fermé comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $M = \exp(N) \in \mathbb{C}[A]$. Le point précédent permet de conclure.

– *Étape 3 :* $\mathbb{C}[A]^\times$ *est un ouvert connexe de* $\mathbb{C}[A]$. On a $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \overset{-1}{\det}(\mathbb{C}^*)$ donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. Montrons qu'il est connexe par arcs. Pour $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$ on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad M(z) = zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A].$$

On va donc chercher un chemin de la forme

$$\forall t \in [0,1], \qquad M(z(t)) = z(t)M + (1-z(t))N$$

avec $t \mapsto z(t)$ continue telle que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$. De plus, l'application $z \mapsto \det(M(z))$ est polynomiale en z donc elle a un nombre fini de zéros. En considérant

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], \qquad z_a(t) = t + iat(1-t),$$

comme $(t,a) \mapsto z_a(t)$ est injective, on peut trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0,1]$, $\det(M(z_a(t))) \neq 0$ et $z_a(0) = z_a(1) = 1$.

– *Étape 4 :* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est ouvert.* On a $\exp(0) = I_n$ et $\mathrm{d}\exp(0) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et $\mathcal{V}$ de I_n dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ tels que l'exponentielle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U dans V. Alors, pour $B \in \mathbb{C}[A]$, on a

$$\exp(B + \mathcal{U}) = \exp(B)\exp(\mathcal{U}) = \exp(B)V$$

(car B commute avec les éléments de $\mathcal{U}$) donc $\exp(B)V$ est un voisinage ouvert de $\exp(B)$ inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$.

– *Étape 5 :* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est fermé dans* $\exp(\mathbb{C}[A])$. On a :

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} \underbrace{M\exp(\mathbb{C}[A])}_{\text{ouvert}}.$$

En effet,

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M\{\exp(0)\} \subset \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M\exp(\mathbb{C}[A])$$

et si $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ et $N = M\exp(B)$ avec $B \in \mathbb{C}[A]$, alors $N \in \mathbb{C}[A]^\times$ et $M = N\exp(-B) \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$.

– *Conclusion :* Par connexité de $\mathbb{C}[A]^\times$, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. $\square$

Corollaire 2

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$\triangleright$ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $A \in \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. $\square$

Corollaire 3

$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$.

$\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exp(M) = \exp(M/2)^2$.

Soit $M = A^2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(P(A)) = A$. Comme A est à coefficients réels, $\exp(\overline{P}(A)) = \exp(\overline{P(A)}) = \overline{A} = A$ donc $\exp((P + \overline{P})(A)) = M \in \exp(\mathbb{R}[A]) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. $\square$