Inégalité d'Heisenberg

B. Candelpergher, *Calcul intégral*, Cassini. Paragraphe 7.11.1 page 383

Recasage : 250.

Théorème 1

Notons, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$x_0^{(f)} = \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2 dx \qquad \xi_0^{(f)} = \int_{\mathbb{R}} \xi |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi$$

$$V(f) = \int_{\mathbb{R}} (x-x_0)^2 |f(x)|^2 dx \qquad V(\mathcal{F}f) = \int_{\mathbb{R}} (\xi-\xi_0)^2 |\mathcal{F}f(\xi)|^2 d\xi.$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_2 = 1$. Alors

$$V(f)V(\mathcal{F}f) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

▷ $-$*Étape 1 : Réduction au cas $x_0 = 0, \xi_0 = 0$.* Posons

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-2i\pi x \xi_0} f(x+x_0).$$

Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}g(\xi) = e^{2i\pi x_0(\xi+\xi_0)} \mathcal{F}f(\xi+\xi_0).$$

On a :

$$|g|^2 = |f(\cdot + x_0)|^2 \qquad |\mathcal{F}g|^2 = |\mathcal{F}f(\cdot+\xi_0)|^2$$

d'où l'on déduit que $\|g\|_2 = 1$ et $x_0^{(g)} = 0$, $\xi_0^{(g)} = 0$ et $V(f) = V(g)$, $V(\mathcal{F}f) = V(\mathcal{F}g)$ et

$$V(g) = \|x \mapsto xg(x)\|_2^2 \qquad V(\mathcal{F}g) = \|\xi \mapsto \xi \mathcal{F}g(\xi)\|_2^2.$$

$-$*Étape 2 : Réduction au même espace.* On a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}g'(\xi) = 2i\pi\xi\mathcal{F}g(\xi)$$

ie.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \xi\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left(\frac{1}{i}g'\right)(\xi)$$

donc

$$\|\xi \mapsto \xi\mathcal{F}g(\xi)\|_2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\mathcal{F}\left(\frac{1}{i}g'\right)\right\|_2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{1}{i}g'\right\|_2$$

car $\mathcal{F}$ est une isométrie sur L^2. Il suffit donc de montrer que

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{2\pi}\|x \mapsto xg(x)\|_2 \left\|\frac{1}{i}g'\right\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|g\|_2^2.$$

$-$*Étape 3 : opérateurs autoadjoints et relation de commutation.* Posons

$$P : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{i}g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$Q : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto (x \mapsto xg(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En munissant $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ du produit scalaire hermitien $\langle .,. \rangle$ de L^2, P et Q sont autoadjoint, et on a

$$i(P \circ Q - Q \circ P) = \mathrm{Id}.$$

Alors, pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\|g\|_2^2 &= \langle g, g\rangle \\
&= \langle i(P\circ Q - Q \circ P)g, g\rangle \\
&= -i\left(\langle Qg, Pg\rangle - \langle Pg, Qg\rangle\right) \\
&= 2\,\mathrm{Im}\langle Qg, Pg\rangle \\
&\leq 2\,|\langle Qg, Pg\rangle| \\
&\leq 2\,\|Qg\|_2\,\|Pg\|_2
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{2\pi}\|x \mapsto xg(x)\|_2 \left\|\frac{1}{i}g'\right\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}\|g\|_2^2.$$

□

Exemple : On définit, pour $a > 0$,

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto c e^{-ax^2}$$

où $c = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{-1/4}$. Alors

$$V(f) = \frac{1}{4a} \qquad \text{et} \qquad V(\mathcal{F}f) = \frac{a}{4\pi^2}$$

donc

$$V(f)V(\mathcal{F}f) = \frac{1}{16\pi^2}.$$

Les gaussiennes réalisent au mieux l'inégalité d'Heisenberg.