# Méthode de Laplace

Présenté le jour J (leçon 218, résultat : 16/20, pas eu le temps de parler de l'application)

F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, 4e édition, Cassini. Exercice 113 page 349.

Recasage : 218, 224, 235, 239.

**Théorème 1** (***Méthode de Laplace***)

*Soient $a < b \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b[,\mathbb{R})$ telle que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$ continue en $a$ telle que $f(a) \neq 0$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-t_0\varphi}f \in \mathrm{L}^1(]a,b[)$. Alors, $F : t \mapsto \int_a^b e^{-t}\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$ est définie pour $t \geq t_0$ et*

*(i) si $\varphi'(a) > 0$, alors $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi'(a)}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{t}$ ;*

*(ii) si $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, alors $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$.*

**Heuristique** Dans les deux cas considérés, $\varphi$ croît strictement sur $[a,b[$ donc, pour $t$ grand, $e^{-t\varphi}$ décroit rapidement et la masse de l'intégrale est concentrée sur un petit intervalle $[a,a+\alpha]$ sur lequel on peut considérer

$$f(x) \simeq f(a) \qquad \varphi(x) \simeq \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$$

respectivement

$$f(x) \simeq f(a) \qquad \varphi(x) \simeq \varphi(a) + \frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2$$

d'où

$$F(t) \simeq e^{-t\varphi(a)}\int_a^b e^{-t\varphi'(a)(x-a)}f(a)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varphi'(a)}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{t}$$

respectivement

$$F(t) \simeq e^{-t\varphi(a)}\int_a^b e^{-t\varphi''(a)(x-a)^2/2}f(a)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}.$$

**Démonstration** – On peut considérer $t_0 = 0$ en remplaçant $t - t_0$ par $t$ et $e^{t_0\varphi}f$ par $f$.

– L'hypothèse, avec $t_0 = 0$, impose que $f \in \mathrm{L}^1(a,b)$ et, comme $\varphi$ est croissante,

$$\forall t \geq 0, \qquad \int_a^b |e^{-t\varphi(x)}f(x)|\mathrm{d}x \leq e^{-t\varphi(a)}\|f\|_{L^1(a,b)} < +\infty$$

donc $F(t)$ est bien définie pour $t \geq 0$.

– Comme $f$ est continue en $a$, prenons $\alpha > 0$, $M \geq 0$ tels que

$$\forall x \in [a,a+\alpha], \qquad |f(x)| \leq M.$$

– Considérons un premier exemple : $a = 0$ et $\varphi(x) = x$. Pour $t > 0$,

$$t\int_0^\alpha e^{-tx}f(x)\mathrm{d}x \underset{u=tx}{=} \int_0^{\alpha t} e^{-u}f\left(\frac{u}{t}\right)\mathrm{d}u \xrightarrow[t\to+\infty]{} f(0)$$

d'après le théorème de convergence dominée, l'hypothèse de domination étant vérifiée grâce à la majoration de $f$ sur $[0,\alpha]$. De plus,

$$\left|\int_\alpha^b e^{-tx}f(x)\mathrm{d}x\right| \leq e^{-t\alpha}\|f\|_{L^1(a,b)} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ceci montre que

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{t}.$$

– On peut désormais traiter le point $(i)$ du théorème. On se ramène au cas précédent par changement de variable. Posons $\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$ de sorte que $\Phi \in \mathcal{C}^1$, pour tout $x \in [a,b[$, $\Phi'(x) = \varphi'(x) > 0$ et $\Phi(a) = 0$. Alors $\Phi$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $[a,b[\to[0,c[$ pour $c\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Notons $\psi$ sa réciproque. D'après le théorème de changement de variable, pour $t\geq 0$,

$$F(t)=e^{-t\varphi(a)}\int_a^b e^{-t\Phi(x)}f(x)\mathrm{d}x=e^{-t\varphi(a)}\int_0^c e^{-ty}f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

Or $\psi'\times f\circ\psi$ est continue en 0 donc, d'après l'exemple précédent,

$$F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(\psi(0))\psi'(0)}{t}=\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\varphi'(a)t}.$$

– Considérons un deuxième exemple : $a=0$ et $\varphi(x)=x^2$. Pour $t>0$,

$$\sqrt{t}\int_0^\alpha e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x\underset{u=\sqrt{t}x}{=}\int_0^{\alpha\sqrt{t}}e^{-u^2}f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}u\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)$$

d'après le théorème de convergence dominée, comme précédemment. De plus,

$$\left|\int_\alpha^b e^{-tx^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\leq e^{-t\alpha^2}\|f\|_{L^1(a,b)}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Ceci montre que

$$F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{f(0)}{\sqrt{t}}.$$

– On peut désormais traiter le point $(ii)$ du théorème. On se ramène au cas précédent par changement de variable. Posons $\Phi(x)=\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}$ de sorte que $\Phi(a)=0$ et $\Phi'(x)=\dfrac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}}$ pour $x>a$ (car $\varphi$ est strictement croissante). De plus,

$$\Phi'(x)\underset{x\to a^+}{\sim}\frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}(x-a)^2}}\underset{x\to a^+}{\sim}\sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}>0.$$

Ainsi, $\Phi$ se prolonge en un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $[a,b[\to[0,c[$ et, en notant $\psi=\Phi^{-1}$, d'après le théorème de changement de variable, pour $t>0$,

$$F(t)=e^{-t\varphi(a)}\int_a^b e^{-t\Phi(x)^2}f(x)\mathrm{d}x=e^{-t\varphi(a)}\int_0^c e^{-ty^2}f(\psi(y))\psi'(y)\mathrm{d}y.$$

Comme $\psi'\times f\circ\psi$ est continue en 0, d'après l'exemple précédent,

$$F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(\psi(0))\psi'(0)}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}.$$

**Remarque :** Si $f(a)=0$ ou $\varphi'(a)=\varphi''(a)=0$, on peut pousser les développements limités à un ordre supérieur et obtenir des résultats analogues.

**Application : formule de Stirling** On a

$$\forall t>0,\qquad \Gamma(t+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^t\mathrm{d}x.$$

Comme $e^{-x}x^t$ est maximal en $x=t$, on fait le changement de variables $x=t(u+1)$ pour se ramener à un maximum en $u=0$ :

$$\Gamma(t+1)=\int_{-1}^\infty e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u$$

avec $\varphi(u)=u+1-\ln(u+1)$ et on écrit

$$\Gamma(t+1)=t^{t+1}\int_{-1}^0 e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u+\int_0^\infty e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u=t^{t+1}\left(\int_0^1 e^{-t\varphi(-u)}\mathrm{d}u+\int_0^\infty e^{-t\varphi(u)}\mathrm{d}u\right).$$

On a $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=0,\varphi''(0)=1$ et $\varphi'>0$ sur $[0,+\infty[$ et $(\varphi(-\cdot))'>0$ sur $[0,1]$ donc la méthode s'applique et

$$\Gamma(t+1)\underset{t\to+\infty}{\sim}t^{t+1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{2\pi}t^te^{-t}$$