Densité des polynômes orthogonaux

V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*, 2e édition, H&K. Exercice 3.7 page 140

Recasage : 201, 202, 207, 209, 213, 245, 250

Théorème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids telle qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < +\infty.$$

La famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

$\triangleright$ Comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée, il suffit de vérifier que la famille est totale. Notons $g_n : x \mapsto x^n$. Comme $\mathrm{Vect}(P_n) = \mathrm{Vect}(g_n)$, d'après le critère de densité, il suffit de considérer $f \in \mathrm{Vect}(g_n)^\perp$ et montrer que $f = 0$.

– *Étape 1 : Transformation de Fourier et prolongement.* Posons $\varphi = f\rho\mathbf{1}_I$. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq \dfrac{1+t^2}{2}$ donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi| = \int_I |f|\rho \leq \int_I (1+|f|)\rho < +\infty$$

donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Notons

$$\widehat{\varphi} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$$

sa transformée de Fourier et montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_a = \left\{z \in \mathbb{C},\, |\operatorname{Im} z| < \dfrac{a}{2}\right\}$. Posons

$$g : \begin{array}{ccc} B_a \times I & \to & \mathbb{R} \\ (z,x) & \mapsto & e^{-izx}f(x)\rho(x). \end{array}$$

On a :

- $\star$ $\forall z \in B_a$, $x \in I \mapsto g(z,x)$ est mesurable,
- $\star$ $\forall x \in I$, $z \in B_a \mapsto g(z,x)$ est holomorphe,
- $\star$ $\forall (z,x) \in B_a \times I$, $|g(z,x)| \leq e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ indépendante de z et intégrable sur I car,

$$\int_I |g(z,x)|\mathrm{d}x \leq \int_I e^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2} < +\infty$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I,\rho)$. D'après le théorème d'holomorphie de Lebesgue, la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} B_a & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\int_I g(z,x)\mathrm{d}x \end{array}$$

est holomorphe sur B_a et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, \qquad F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx}f(x)\rho(x)\mathrm{d}x.$$

– *Conclusion.* On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F^{(n)}(0) = (-1)^n\langle f, g_n\rangle_\rho = 0.$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, il existe un voisinage $V \subset B_a$ de 0 sur lequel $F \equiv 0$. Alors, d'après le principe des zéros isolés, $F \equiv 0$ sur B_a. En particulier, $\widehat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} = 0$ d'où, par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, $\varphi = 0$ presque partout. Alors, comme $\rho > 0$, on a $f = 0$ presque partout. $\square$

Contre exemple lorsque la condition de décroissance n'est pas vérifiée Considérons $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = x^{-\ln x}$. Soit $f(x) = \sin(2\pi \ln x)$. On a $f \in L^2(I, \rho)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} x^n \sin(2\pi \ln x) x^{-\ln x} \mathrm{d}x &\underset{y=\ln x}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \mathrm{d}y \\
&= e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y^2 - \frac{n+1}{2}\right)} \sin(2\pi y) \mathrm{d}y \\
&\underset{t=y-\frac{n+1}{2}}{=} e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \sin(2\pi t) \mathrm{d}t = 0
\end{aligned}$$

donc $f \in \mathrm{Vect}(g_n)^\perp$.