Probabilité que deux entiers soient premiers entre eux

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1*, 3e édition, Cassini. Exercice 4.33 page 156.

Recasage : 190, 230.

Proposition 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n la probabilité que deux entiers choisis au hasard dans $[\![1, n]\!]^2$ soient premiers entre eux. On a :

$$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{6}{\pi^2}.$$

– *Étape 1 : Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$, où*

$$\forall d \in \mathbb{N}^* \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d = 1 \\ 0 & \text{si } d \text{ a un facteur carré} \\ (-1)^k & \text{si } d = p_1 \dots p_k \text{ avec les } p_i \text{ premiers distincts.} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_n = \{(a, b) \in [\![1, n]\!]^2,\ a \wedge b = 1\}$ de sorte que $r_n = \dfrac{\operatorname{Card} A_n}{n^2}$. Soit $\{p_1, \dots, p_k\}$ l'ensemble des nombres premiers distincts dans $[\![1, n]\!]$. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, notons $U_i = \{(a, b) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_i | a \text{ et } p_i | b\}$. On a :

$$A_n = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right)^c$$

donc

$$\operatorname{Card} A_n = n^2 - \operatorname{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right).$$

On utilise la formule du crible :

Lemme 2

Soient $U_1, \dots, U_k$ des ensembles finis. On a :

$$\operatorname{Card} \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i \right) = \sum_{\emptyset \neq I \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{1+\operatorname{Card} I} \operatorname{Card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right).$$

Pour $I = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subset [\![1, k]\!]$, on a :

$$\operatorname{Card} \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = \operatorname{Card} \left\{ (a, b) \in [\![1, n]\!]^2,\ p_{i_1} \cdots p_{i_\ell} | a \text{ et } p_{i_1} \cdots p_{i_\ell} | b \right\} = \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_\ell}} \right\rfloor^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Card} A_n &= n^2 - \sum_{\{i_1,\dots,i_\ell\} \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{\ell+1} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_\ell}} \right\rfloor^2 \\ &= n^2 + \sum_{\{i_1,\dots,i_\ell\} \subset [\![1,k]\!]} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_\ell}) \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_\ell}} \right\rfloor^2 \\ &= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2.$$

– *Étape 2 : Exploitons l'équivalent* $\frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{d^2}$. Considérons

$$\left|r_n - \sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| = \left|\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right|.$$

Pour tout $1 \leq d \leq n$, on a $\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor > \frac{n}{d} - 1$ d'où l'on déduit

$$\frac{1}{n^2} - \frac{2}{nd} < \frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0.$$

Alors,

$$\left|r_n - \sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \sum_{d=1}^{n}\left(\frac{2}{nd} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d} + \frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

grâce à l'équivalent des sommes partielles de la série harmonique. Comme la série $\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2}$ converge absolument,

$$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}.$$

– *Étape 3 : Il ne reste plus qu'à montrer que* $\left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = 1$. Les deux séries convergeant absolument, la famille $\left(\frac{\mu(d)}{(nd)^2}\right)_{(n,d)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Alors,

$$\left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{(n,d)\in\mathbb{N}^2}\frac{\mu(d)}{(nd)^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{d|p}\frac{\mu(d)}{p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\sum_{d|p}\mu(d).$$

Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n}\mu(d) = \delta_{1n}$. Pour $n = 1$, c'est vrai. Soit $n \geq 2$. On écrit $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ avec $\alpha_\ell \geq 1$ pour tout $1 \leq \ell \leq k$ et $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts. Pour $d|n$, $\mu(d) \neq 0$ si et seulement si $d = p_{i_1}\cdots p_{i_\ell}$ et dans ce cas $\mu(d) = (-1)^\ell$. Pour un $\ell \in \{1, \ldots, k\}$ fixé, il y a $\binom{k}{\ell}$ tels choix de d. Ainsi,

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}(-1)^\ell = 0.$$

Ainsi,

$$\left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right) = 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}.$$