Réduction de Jordan pour les endomorphismes nilpotents

Présenté le jour J (leçon 157, résultat 16/20)

X. Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, 2e édition, Ellipses. Théorème 4 page 197.
J. Grifone, *Algèbre linéaire*, 5e édition, Cépaduès. Proposition 6.36 page 198 pour la taille des blocs.

Recasage : 157.

Théorème 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des entiers $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} J_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_r} \end{pmatrix}$$

où

$$J_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{R})$$

▷ Notons $r \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u,*ie.* $u^{r-1} \neq 0$ et $u^r = 0$. Pour $1 \leq i \leq r$, notons $F_i = \operatorname{Ker}(u^i)$.

– *Étape 1 : Noyaux itérés* Montrons que $\forall 1 \leq i \leq r$, $u(F_i) \subset F_{i-1}$ et

$$\{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_r = E.$$

Pour tout $1 \leq i \leq r$ et $x \in F_i$, on a $0 = u^i(x) = u^{i-1}(u(x))$ donc $u(x) \in F_{i-1}$. De plus, $u^{i+1}(x) = u(u^i(x)) = 0$ donc $x \in F_{i+1}$. Enfin, si $F_{i+1} = F_i$, alors, si $x \in F_{i+2}$, on a $u^{i+2}(x) = 0$ donc $u(x) \in F_{i+1} = F_i$ donc $x \in F_{i+1}$. Ainsi, $F_{i+2} \subset F_{i+1}$, donc $F_{i+2} = F_i$. On en déduit que $E = F_r = F_i$ donc $u^i = 0$ *ie.* $i = r$, par définition de r.

– *Étape 2 : Construction d'une décomposition de E.* Soit G_r un supplémentaire de F_{r-1} dans F_r :

$$F_r = G_r \oplus F_{r-1}.$$

D'après ce qui précède, on a $u(G_r) \subset u(F_r) \subset F_{r-1}$ et même $u_{|G_r}$ est injective. En effet,

$$(\operatorname{Ker} u) \cap G_r = F_1 \cap G_r \subset F_{r-1} \cap G_r = \{0\}.$$

Par ailleurs, $u(G_r) \cap F_{r-2} = \{0\}$. En effet, si $y \in u(G_r) \cap F_{r-2}$, $y = u(x)$ pour $x \in G_r$ et $0 = u^{r-2}(y) = u^{r-1}(x)$ donc $x \in G_r \cap F_{r-1} = \{0\}$ donc $y = 0$.

Ainsi, $u(G_r) \oplus F_{r+2} \subset F_{r-1}$ donc il existe un sous-espace vectoriel H_{r-1} de F_{r-1} tel que $\underbrace{u(G_r) \oplus H_{r-1}}_{G_{r-1}} \oplus F_{r-2} = F_{r-1}$.

On a donc construit G_r, G_{r-1}, H_{r-1} tels que

$$F_r = G_r \oplus F_{r-1}, \qquad G_{r-1} = u(G_r) \oplus H_{r-1}, \qquad u_{|G_r} : G_r \to G_{r-1} \text{ injective.}$$

Par récurrence descendante, on construit de même des sous-espaces vectoriel de E, $G_1, \ldots, G_r$, $H_1, \ldots, H_{r-1}$ tels que :
(i) $\forall 1 \leq i \leq r$, $F_i = G_i \oplus F_{i-1}$
(ii) $\forall 1 \leq i \leq r-1$, $G_i = u(G_{i+1}) \oplus H_i$
(iii) $\forall 1 \leq i \leq r-1$, $u_{|G_{i+1}} : G_{i+1} \to G_i$ est injective.

En particulier, $G_1 = F_1 = \operatorname{Ker} u$ et $E = F_r = \bigoplus_{i=1}^{r} G_i$.

– *Conclusion.* À partir d'une base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ de G_i on obtient une famille libre de G_{i-1} en considérant $(u(\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_k)))$, que l'on peut compléter en une base de G_{i-1}. On construit ainsi le tableau suivant.

G_r	$e_{r,1}$	$\dots$	e_{r,s_r}								
G_{r-1}	$u(e_{r,1})$	$\dots$	$u(e_{r,s_r})$	$e_{r-1,1}$	$\dots$	$e_{r-1,s_{r-1}}$					
G_{r-2}	$u^2(e_{r,1})$	$\dots$	$u^2(e_{r,s_r})$	$u(e_{r-1,1})$	$\dots$	$u(e_{r-1,s_{r-1}})$	$e_{r-2,1}$	$\dots$			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$			
G_1	$u^{r-1}(e_{r,1})$	$\dots$	$u^{r-1}(e_{r,s_r})$	$u^{r-2}(e_{r-1,1})$	$\dots$	$u^{r-2}(e_{r-1,s_{r-1}})$	$u^{r-3}(e_{r-2,1})$	$\dots$	$e_{1,1}$	$\dots$	e_{1,s_1}

En lisant le tableau de bas en haut, de gauche à droite, on obtient une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $u(e_i) = e_{i-1}$ si e_i n'est pas sur la dernière ligne et $u(e_i) = 0$ sinon. On obtient bien des blocs de Jordan. □

Remarque : Si n_p est le nombre de blocs de taille $1 \leq p < r$, on a

$$n_p = 2 \dim F_p - \dim F_{p-1} - \dim F_{p+1}.$$

En effet, si $p < r$, on a $n_p = \dim H_p$ et

$$F_p = G_p \oplus F_{p-1} \qquad G_p = u(G_{p+1}) \oplus H_p \qquad F_{p+1} = G_{p+1} \oplus F_p$$

donc, comme $u_{|G_{p+1}}$ est injective,

$$\dim F_p = \dim G_p + \dim F_{p-1}$$
$$\dim G_p = \dim G_{p+1} + \dim H_p$$
$$\dim F_{p+1} = \dim G_{p+1} + \dim F_p$$

d'où le résultat.

Si $p = r$, on a $n_r = \dim G_r = n - \dim F_{r-1}$.