Sommes de Newton et algorithme de Faddeev

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 1*, 3[e] édition, Cassini. Exercice 5.31 page 209 pour le premier théorème.

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Algèbre 2*, 2[e] édition, Cassini. Exercice 2.7 page 79 pour le second théorème.

Recasage : 142, 144.

Théorème 1

Soit K un corps. Pour $x_1, \dots, x_n \in K$ et $k \in \mathbb{N}$ on note $S_k = \sum_{j=1}^{n} x_j^k$ la k-ième somme de Newton. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \dots, x_n$ et $\sigma_0 = 1$, on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

▷ Notons $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ de sorte que $P = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sigma_k X^{n-k}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{XP}{X - x_i} &= \frac{P}{1 - \frac{x_i}{X}} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sigma_k X^{n-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_i^k}{X^k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sigma_j X^{n-j}\frac{x_i^{k-j}}{X^{k-j}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sigma_j x_i^{k-j}\right) X^{n-k}
\end{aligned}$$

donc

$$XP' = \sum_{i=1}^{n}\frac{XP}{X - x_i} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sigma_j S_{k-j}\right) X^{n-k}.$$

Or

$$XP' = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sigma_k (n-k) X^{n-k}$$

donc par unicité de l'écriture de XP' dans la base canonique,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \sigma_j S_{k-j} = (-1)^k \sigma_k (n-k)$$

ie.

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j \sigma_j S_{k-j} + (-1)^k \sigma_k S_0 = (-1)^k \sigma_k (n-k)$$

d'où

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^k \sigma_k S_{k-j} + (-1)^k k\sigma_k$$

De plus, des deux écritures de XP' on déduit également

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \sigma_j S_{n-j} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer puisque $S_0 = n$. □

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit $A_0 = A$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A_{k+1} = A\left(A_k - \frac{\operatorname{Tr}(A_k)}{k+1} I_n\right).$$

Alors

$$\chi_A = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Tr}(A_{k-1})}{k} X^{n-k}\right).$$

▷ Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires et $S_0 = n, S_1, \ldots, S_n$ les sommes de Newton associées.

– *Étape 1 : Montrons par récurrence sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que $A_k = A^{k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\operatorname{Tr}(A_i)}{i+1} A^{k-i}$ et $\operatorname{Tr}(A_k) = (-1)^k (k+1)\sigma_{k+1}$.*

 ⋆ $k = 0$: ok.

 ⋆ Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que le résultat est vrai. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$A_{k+1} = A^{k+2} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\operatorname{Tr}(A_i)}{i+1} A^{k+1-i} - \frac{\operatorname{Tr}(A_k)}{k+1} A = A^{k+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\operatorname{Tr}(A_i)}{i+1} A^{k+1-i}$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(A_{k+1}) \quad &= \quad \operatorname{Tr}(A^{k+2}) - \sum_{i=0}^{k} \frac{\operatorname{Tr}(A_i)\operatorname{Tr}(A^{k+1-i})}{i+1} \\
&\underset{\text{HR}}{=} \quad S_{k+2} - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma_{i+1} S_{k+1-i} \\
&= \quad S_{k+2} - \sigma_1 S_{k+2} + \cdots + (-1)^{k+1} \sigma_{k+1} S_1 \\
&\underset{\text{Newton}}{=} \quad (-1)^{k+1} (k+2) \sigma_{k+2}
\end{aligned}$$

– *Conclusion.* On en déduit que

$$\chi_A = (-1)^n X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sigma_k X^{n-k} = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Tr}(A_{k-1})}{k} X^{n-k}\right).$$

□