Sous-groupes distingués et caractères

F. Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses. Lemme 17.20 et Proposition 17.22 page 158.

Recasage : 101, 103, 104, 107.

Lemme 1

Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de caractère χ. Alors $\forall g \in G$, $|\chi(g)| \leq \chi(1)$ et

$$g \in \operatorname{Ker} \chi = \{g \in G,\, \chi(g) = \chi(1)\} \iff g \in \operatorname{Ker} \rho.$$

▷ Soit $g \in G$. D'après le théorème de Lagrange, il est d'ordre fini, donc $\rho(g)$ aussi. Ainsi, $\rho(g)$ est diagonalisable et les valeurs propres de $\rho(g)$ sont de module 1. Notons-les $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\dim V}$. Alors,

$$|\chi(g)| = \left| \sum_{i=1}^{\dim V} \lambda_i \right| \leq \dim V = \chi(1)$$

avec égalité si et seulement si ($|\lambda_i| = 1$) $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{\dim V}$ et dans ce cas, $\lambda_i = 1$, $\forall i$, donc $\rho(g) = \mathrm{Id}$ *ie.* $g \in \operatorname{Ker} \rho$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \chi \subset \operatorname{Ker} \rho$ et l'inclusion réciproque est immédiate. □

Théorème 2

Soit G un groupe fini et $\chi_1, \ldots, \chi_m$ ses caractères irréductibles. Tout sous-groupe distingué $H \lhd G$ est de la forme

$$H = \bigcap_{j \in J} \operatorname{Ker} \chi_j$$

avec $J \subset \{1, \ldots, m\}$.

▷ Soit $H \lhd G$.

– *Étape 1 : H est le noyau d'un caractère.* On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche et $\varphi : G \to \mathfrak{S}_{|G/H|}$ le morphisme associé. Considérons la représentation par permutation

$$\rho_\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}(V) \\ g & \mapsto & \big((e_i) \mapsto e_{\varphi(g)(i)}\big) \end{array}$$

où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dfrac{|G|}{|H|}$ et (e_i) est une base de V. Soit χ le caractère de cette représentation. D'après le lemme,

$$\operatorname{Ker} \chi = \operatorname{Ker} \rho_\varphi = \operatorname{Ker} \varphi = H.$$

Ainsi, les groupes distingués sont des noyaux de caractères de G.

– *Étape 2 : Conclusion.* Soit $V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} a_i V_i$ une décomposition en sous-représentations irréductibles telle que χ_i est le caractère de V_i, $\forall i$. Alors :

$$g \in \operatorname{Ker} \chi \Leftrightarrow g \in \operatorname{Ker} \rho \Leftrightarrow \forall i,\, g \in \operatorname{Ker} \rho_i \Leftrightarrow \forall i,\, g \in \operatorname{Ker} \chi_i$$

donc $H = \operatorname{Ker} \chi = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \chi_i$. □

Rajouter une table de caractères et donner les sous-groupes.