Table de $\mathfrak{S}_4$

Recasage : 161, 183.

– *Étape 1 : classes de conjugaison.* Il y a cinq classes de conjugaison, déterminées par le type de la permutation :
- $\{\mathrm{Id}\}$: un élément
- les transpositions : $\binom{4}{2} = 6$ éléments
- les 3-cycles : $\binom{4}{3} \times 2 = 8$ éléments
- les 4-cycles : $4! \times \frac{1}{4} = 6$ éléments
- les doubles transpositions : $\binom{4}{2} \times \frac{1}{2} = 3$ éléments.

Il y a donc cinq caractères irréductibles.

– *Étape 2 : premiers caractères irréductibles.* On connait deux caractères de degré 1 : χ_{triv} et χ_ε.

	$(\mathrm{Id})_1$	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1

– *Étape 3 : isométries du tétraèdre régulier.* Notons T un tétraèdre régulier centré en l'origine. Notons e_1, e_2, e_3, e_4 les sommets. On définit un morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_4 & \to & \mathrm{Is}(T) \\ \sigma & \mapsto & u : \begin{array}{ccc} T & \to & T \\ e_i & \mapsto & e_{\sigma(i)} \end{array} \end{array}$$

φ est bien définie car T est régulier et (e_1, e_2, e_3, e_4) est un repère affine. De plus, $\sigma \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \forall i,\ \sigma(i) = i \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{Id}$ donc φ est injective. Enfin, φ est surjective puisqu'une isométrie envoie un sommet sur un sommet. Donc φ est un isomorphisme.

On a donc $\varphi : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Is}(T) \subset O(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)$ donc φ induit une représentation de degré 3. Le caractère χ_3 associé est $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4,\ \chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(\varphi(\sigma))$. On effectue les calculs dans la base (e_1, e_2, e_3) sachant que $e_4 = -e_1 - e_2 - e_3$. On a :

$$\operatorname{Mat}\varphi((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \chi_3((12)) = 1$$

$$\operatorname{Mat}\varphi((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \chi_3((123)) = 0$$

$$\operatorname{Mat}\varphi((1234)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \chi_3((1234)) = -1$$

$$\operatorname{Mat}\varphi((12)(34)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \chi_3((12)(34)) = -1.$$

De plus, χ_3 est irréductible car

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} |\chi_3(\sigma)|^2 = \frac{1}{24}\left(3^2 + 6 \times 1^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2\right) = 1.$$

On complète donc la table.

	$(\mathrm{Id})_1$	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1

– *Étape 4 : construction d'une nouvelle représentation.* Considérons la représentation $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_3, V_\varepsilon)$. On a $\chi_W = \overline{\chi_3}\chi_\varepsilon = (3, -1, 0, 1, -1)$ donc χ_W est un nouveau caractère. De plus, il est irréductible car $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$. On complète donc la table :

	$(\mathrm{Id})_1$	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

– *Étape 5 : relations d'orthogonalité.* Soit χ le dernier caractère irréductible. On a :

$$24 = |\mathfrak{S}_4| = \chi_{\mathrm{triv}}(\mathrm{Id})^2 + \chi_\varepsilon(\mathrm{Id})^2 + \chi_3(\mathrm{Id})^2 + \chi_W(\mathrm{Id})^2 + \chi(\mathrm{Id})^2 = 20 + \chi(\mathrm{Id})^2$$

donc χ est de degré 2. De plus, grâce à

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4 \backslash \{\mathrm{Id}\}, \qquad 0 = \sum_{\chi' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_4)} \chi'(\mathrm{Id})\chi'(\sigma),$$

on obtient $\chi = (2, 0, -1, 0, 2)$ d'où la table

	$(\mathrm{Id})_1$	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

Remarque : Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont les $\displaystyle\bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_4)} \mathrm{Ker}\,\chi$ où $\mathrm{Ker}(\chi) = \{\sigma \in \mathfrak{S}^4,\ \chi(\sigma) = \chi(\mathrm{Id})\}$. On obtient que les sous-groupes distingués sont

$$\{\mathrm{Id}\}, \langle (12)(34) \rangle, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4.$$