Théorème de Lie-Kolchin

A. Chambert-Loir, *Algèbre corporelle*, version pdf sur la page personnelle de l'auteur, page 98.

Inutilisé.

Théorème 1 (*Lie-Kolchin*)

Tout sous-groupe connexe résoluble G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Dans la suite, on identifiera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$.

$\triangleright$ Montrons par récurrence sur $s = n + m \geq 2$ $(n \geq 1, m \geq 1)$ que tout sous-groupe connexe résoluble G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $D^m(G) = \{I_n\}$ et $D^{m-1}(G) \neq \{I_n\}$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

– $s = 2$: Si $n = m = 1$, alors le résultat est vrai.

– Soit $s = n + m > 2$ et supposons le résultat vrai pour tout $s' < n$.

$\star$ 1$^{\text{er}}$ cas : soit $\{0\} \subsetneq V \subsetneq \mathbb{C}^n$ tel que V est stable par G. Notons $r = \dim V$. Alors, si V' est un supplémentaire de V dans $\mathbb{C}^n$, dans une base adaptée à $\mathbb{C}^n = V \oplus V'$, les éléments $g \in G$ ont une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A_g & * \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$ où $A_g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), B_g \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$. L'application $g \in G \mapsto A_g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes continu donc son image est un sous-groupe G' de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ qui est connexe et résoluble[1]. De même, l'image G'' de l'application $g \in G \mapsto B_g \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$ est un sous-groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$. De plus, $s(G'), s(G'') < s$ ([2]) donc, par hypothèse de récurrence, il existe $P \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$,$Q \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}G'P \subset \mathcal{T}_r(\mathbb{C})$ et $Q^{-1}G''Q \subset \mathcal{T}_{n-r}(\mathcal{C})$. Alors,

$$\begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}^{-1} G \begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix} \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{C}).$$

$\star$ 2$^{\text{e}}$ cas : on suppose qu'un tel espace n'existe pas (la représentation de G sur $V = \mathbb{C}^n$ est *irréductible*).

• Si $m = 1$, alors G est commutatif et tous les éléments de G ont un vecteur propre $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ en commun. Alors, comme V est irréductible, $V = \mathbb{C}v$ et $n = 1$ et le cas est déjà traité.

• Supposons par l'absurde que $m > 1$. Posons $H = D(G) \neq \{I_n\}$. Alors H est un sous-groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $m(H) = m(G) - 1$ donc, par hypothèse de récurrence, il existe $0 \neq v_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\forall h \in H$, $hv_0 = \lambda(h)v_0$ où $\lambda(h) \in \mathbb{C}^*$. Notons que $\lambda \in H^*$ l'ensemble des caractères continus de H.

Posons $W = \bigoplus_{\chi \in H^*} V_\chi$ où

$$V_\chi = \{v \in V,\, \forall h \in H,\, h(v) = \chi(h)v\}\,.$$

Pour tout $g \in G$, on a $gV_\chi \subset V_{g\chi}$ où $g\chi(h) = \chi(g^{-1}hg)$, $\forall h \in H$.. En effet, si $v \in V_\chi$, alors

$$hg(v) = g \underbrace{g^{-1}hg}_{\in H \text{ car } H \lhd G} (v) = g\left(\chi(g^{-1}hg)v\right) = \chi(g^{-1}hg)g(v).$$

Ainsi, comme $g\chi \in H^*$, le sev W est stable par G. Comme $0 \neq v_0 \in W$ et V est irréductible, $W = V$. Ceci signifie que $H \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonales.

Soit $h \in H \backslash \{I_n\}$. Pour tout $g \in G$, $g^{-1}hg \in H$ est diagonale et a les mêmes valeurs propres que h. Il y a un nombre fini de telles matrices. L'application $g \in G \mapsto g^{-1}hg \in H$ est donc continue d'un ensemble connexe à valeurs dans un ensemble fini. Elle est donc constante. Comme I_n a pour image h, $\forall g \in G$, $g^{-1}hg = h$. Ainsi, $H \subset Z(G)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de h et E l'espace propre associé. Alors E est stable par G donc, comme V est irréductible, $E = V$ donc $h = \lambda I_n$. Comme $H \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (commutateurs), $\lambda^n = 1$. Ainsi, $H \subset \{\lambda I_n,\, \lambda \in \mathbb{C}^*,\, \lambda^n = 1\}$. Comme H est connexe et $I_n \in H$, $\lambda = 1$ et $H = \{I_n\}$: contradiction. $\square$

1. Si G est un groupe et s'il existe un morphisme surjectif d'un groupe résoluble dans G, alors G est résoluble.
2. La dimension a baissé et $m(G'), m(G'') \leq m(G)$.