Transformation d'Euler

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, Analyse 1*, 2e édition, Cassini. Exercice 3.33 page 182.

Inutilisé.

Proposition 1

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0$, $(-1)^p f^{(p)}(x) \geq 0$. On suppose de plus que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(n)$ converge et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\Delta^p f(0)}{2^{n+1}} + R_p$$

avec $|R_p| \leq \dfrac{|\Delta^p f(0)|}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, où $\Delta f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x) - f(x+1)$.

▷ La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f(n)$ converge d'après le critère des séries alternées.

– Montrons, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs décroissante vers 0, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \Delta^p u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\Delta^n u_0}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^p u_n$$

où $(\Delta u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

⋆ $p = 0$: ok.

⋆ $p \to p+1$: Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \Delta^{p+1} u_n = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \Delta^p u_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \Delta^p u_{n+1} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \Delta^p u_n + \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^n \Delta^p u_n$$

donc, par hypothèse de récurrence, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \Delta^p u_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^{p+1} u_n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^p u_n - \Delta^p u_0 = 2^{p+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n - \sum_{n=0}^{p-1}\frac{\Delta^n u_0}{2^{n+1}}\right) - \Delta^p u_0$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_0 = \sum_{n=0}^{p} \frac{\Delta^n u_0}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^{p+1} u_n.$$

– Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Par hypothèse, f et $-f'$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$ donc (u_n) est positive et décroissante. De plus, par hypothèse, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après ce qui précède, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(n) = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{\Delta^p f(0)}{2^{n+1}} + \underbrace{\frac{1}{2^p}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Delta^p f(n)}_{R_p}.$$

– Pour démontrer la majoration sur R_p, montrons que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \Delta^p f(n)$ vérifie le critère des séries alternées, car alors la somme est inférieure à son premier terme.

– Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Delta^p f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

⋆ $p = 0$: ok.

$\star$ $p \to p+1$: Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $-f'$ vérifie également cette hypothèse et, par hypothèse de récurrence appliquée à $-f'$, on a $\Delta^p(-f') \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Mais $\Delta^p(-f') = -(\Delta^p f)'$ donc $\Delta^p f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc Δ^{p+1} est positive.

– On a également montré que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\Delta^p f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, on a déjà montré que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \Delta^p f(n)$ converge donc, en particulier, $\Delta^p f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le critère des séries alternées,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad |R_p| \leq \frac{|\Delta^p f(0)|}{2^p}.$$

– Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Delta^{p+1} f(0) = \Delta^p f(0) - \underbrace{\Delta^p f(1)}_{\geq 0} \leq \Delta^p f(0)$ donc la suite $(\Delta^p f(0))_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi,

$$|R_p| \leq \frac{f(0)}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

$\square$

Application : On considère $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Pour $p = 30$, on a $\dfrac{\Delta^p f(0)}{2^{30}} = \dfrac{1}{31 \times 2^{30}} < 4 \times 10^{-11}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{29} \frac{\Delta^n f(0)}{2^{n+1}}$ est une valeur approchée à moins de 4×10^{-11} près de $\ln 2$.

On a $\Delta^n f(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(k)$ donc l'évaluation précédente requiert $\displaystyle\sum_{n=0}^{29}(n+1) = \frac{30 \times 31}{2} = 465$ additions.

Or, d'après la majoration obtenue par le critère des séries alternées,

$$\left| \ln 2 - \sum_{n=0}^{465} (-1)^n f(n) \right| \leq \frac{1}{467} > 0,002.$$

De fait, $\ln 2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{465}(-1)^n f(n) \geq 10^{-3}$.