Preuve avec les notations du El Amrani p 123 **Fourier – Plancherel** 1

- $\mathcal{F}$ bien définie sur L^1
- $L^1 \cap L^2$ dense dans $(L^2, \|.\|_2)$, qui est complet ($\mathcal{C}_c^\infty$, ou tronquer par plateau)
- à montrer : $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2$ est à valeurs dans L^2
- à montrer : $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 \cdot (2\pi)^d$

↳ Ainsi, prolongement de fonctions uniformément continues (car linéaire + isométrie) donne le prolongement de $\mathcal{F}$ à L^2

↳ passage à la limite dans égalité des normes donne $\forall f \in L^2$,
$$\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 (2\pi)^d$$

Def : pour $f \in L^1$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$

Prop : Pour $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$

preuve

- On considère γ_ε le noyau de Gauss
$$\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\varepsilon})^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\varepsilon}} \quad \text{pour } \varepsilon > 0$$

Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On pose $f_\varepsilon = f * \gamma_\varepsilon$

→ bien définie car $f \in L^1$ et $\gamma_\varepsilon \in L^1$.

→ $f_\varepsilon \in L^1$ car $f \in L^1$ et $\gamma_\varepsilon \in L^1$ et même $f_\varepsilon \in L^2$ car $f \in L^2$ et $\gamma_\varepsilon \in L^1$

Comme $f \in L^1$, d'après Riemann-Lebesgue, $\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\xi \to +\infty]{} 0$.

Donc $\hat{f_\varepsilon} = \hat{f}\,\hat{\gamma_\varepsilon} \in L^1$ car $\hat{\gamma_\varepsilon} \in L^1$ et $\hat{f}$ bornée.

- Justification des assertions sur $\hat{\gamma_\varepsilon}$:

$$\hat{\gamma_\varepsilon}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} e^{-ix\xi} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\varepsilon} + ix\xi\right)} dx \qquad \left(\frac{x^2}{2\varepsilon} + ix\xi\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}\, i\xi}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon\xi^2}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon}\, i\xi}{2}\right)^2} dx \qquad u = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}} dx \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{\varepsilon}\, du = \sqrt{2\pi}\sqrt{\varepsilon}$$

Donc $\hat{\gamma}_\varepsilon(\xi) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi^2}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{vérification : } \mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \\ \text{donc } \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \cdot \sqrt{2\varepsilon\pi}\, e^{-\frac{\xi^2}{4}2\varepsilon} \\ \qquad\qquad = e^{-\frac{\xi^2\varepsilon}{2}} \end{array} \right)$$

On a donc bien $\hat{\gamma}_\varepsilon \in L^1$

D'après la formule d'inversion sur L^1, $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\varepsilon(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

. On calcule alors

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\varepsilon(\xi)\overline{\hat{f}_\varepsilon(\xi)} d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) e^{-ix\xi} dx\, \overline{\hat{f}_\varepsilon(\xi)}\, d\xi$$

Fubini ok, tout le monde est L^1

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_\varepsilon(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_\varepsilon(\xi) e^{ix\xi} d\xi}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\overline{f_\varepsilon(x)}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^2 dx$$

D'où $\hat{f}_\varepsilon \in L^2$ et $\|\hat{f}_\varepsilon\|_2^2 = 2\pi \|f_\varepsilon\|_2^2$

. On étudie les limites de ces deux quantités quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

. $\|\hat{f}_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)\hat{\gamma}_\varepsilon(x)|^2 dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 e^{-\varepsilon x^2} dx$$

la suite $(|\hat{f}(x)|^2 e^{-\varepsilon x^2})_\varepsilon$ est une suite croissante (qd $\varepsilon \to 0$) de fonctions mesurables positives. Donc Beppo-Levi s'applique : $\|\hat{f}_\varepsilon\|_2^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2$

/!\ la limite peut être ∞.

Il faut étudier l'autre terme

- γ_ε est une approximation de l'unité donc $\|f * \gamma_\varepsilon - f\|_2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

et donc $\|f_\varepsilon\|_2^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \|f\|_2^2$

($\|f_\varepsilon\|_2 \leq \|f_\varepsilon - f\|_2 + \|f\|_2$ Donc $\|f_\varepsilon\|_2 - \|f\|_2 \leq \|f_\varepsilon - f\|_2$

et idem avec $\|f\|_2 \leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon\|_2$)

preuve de ce dernier fait :

$$\int |f * \gamma_\varepsilon(x) - f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\gamma_\varepsilon(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} f(x)\gamma_\varepsilon(y)\,dy \right|^2 dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\, \gamma_\varepsilon(y)\,dy \right)^2 dx$$

Hölder

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left[\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^2 \gamma_\varepsilon(y)\,dy \right)^{1/2} \Big(\underbrace{\int 1^{1/2} \gamma_\varepsilon(y)\,dy}_{=1} \Big)^{1/2} \right]^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\tau_y f - f|(x)^2 \gamma_\varepsilon(y)\,dy\,dx$$

$$\overset{F.T}{=} \int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_2^2 \gamma_\varepsilon(y)\,dy$$

$$= \int_{|y|>\delta} \|\tau_y f - f\|_2^2 \gamma_\varepsilon(y)\,dy + \underbrace{\int_{|y|<\delta} \|\tau_y f - f\|_2^2 \gamma_\varepsilon(y)\,dy}_{\leq \varepsilon \text{ car } \tau_y f \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f}$$

$$\leq \underbrace{2\|f\|_\infty^2}_{\text{ok si } f\, \mathcal{C}_c^0} \int_{|y|>\delta} \gamma_\varepsilon(y)\,dy \quad \downarrow \varepsilon \to 0 \quad 0$$

+ densité dans L^2 (ou L^p).

Donc finalement $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\hat{f}_\varepsilon\|_2^2 = 2\pi \lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon\|_2^2 = \|f\|_2^2 \cdot 2\pi$

D'où $\hat{f} \in L^2$ et $\boxed{\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2}$

$\Longrightarrow$ Donc $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique à L^2, à valeurs dans L^2 en une application uniformément continue.
(linéaire aussi car linéarité de la limite)

De plus, $\forall f \in L^2$, $\quad \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$

en effet : Egalité vraie pour $f \in L^1 \cap L^2$
$\longrightarrow$ suite approchante $\underset{L^1 \cap L^2}{f_n} \longrightarrow f \in L^2$

$\|\hat{f_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f_n\|_2$ et continuité de $\mathcal{F}$. $\hat{f_n} \xrightarrow{\|.\|_2} \hat{f}$

D'où $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$.