Le mouvement Brownien

GRELA Fabrice

18 Mai 2015

Table des matières

1 Présentation et définition du mouvement Brownien

1.1 Introduction

Le 29 Mars 1900, Louis Jean Baptiste Alphonse Bachelier a présenté à Paris sa thèse portant sur les fluctuations du marché économique. La solution proposé par Bachelier nécessite l'introduction de nouveaux concepts mathématiques comme le mouvement Brownien.

Ce concept a été observé quelque décénies plus tôt, en 1828, quand le botaniste Robert Brown a remarqué que le mouvement d'un grain de pollen placé dans un récipient rempli d'eau et chauffé est totalement désordonné et ne suit pas les lois de la physique classique. Brown n'a trouvé aucune explications scientifiques à ce phénomènes. Ce n'est qu'en 1905, qu'Albert Einstein a proposé une explication en introduisant la notion de processus stochastique, aléatoire qu'Einstein a appelé le mouvement Brownien.

FIGURE 1 – Mouvement brownien d'une particule en suspension dans l'eau

La théorie d'Einstein nécessite d'admettre l'existence du mouvement Brownien qui n'a été démontré qu'en 1923 par Wiener.

1.2 Définition

Définition 1 (Mouvement Brownien)**.**
Le mouvement Brownien $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ est une fonction aléatoire de la variable t (le temps) qui vérifie :

1. $W(0) = 0$ et pout tout $t > 0$, W(t) suit la loi normale d'espérance 0 et de variance t.
2. Pour tout $0 < s < t, W(t) - W(s)$ est indépendant de $\{W(u)\}_{0\leq u\leq s}$, c'est-á-dire que la connaissance de W dans le temps présent n'apporte pas de d'informations supplémentaires á la connaissance de W dans le futur.
3. La variable aléatoire $W(t) - W(s)$ suit la même loi que $W(t-s)$.
4. L'application $t \longmapsto W(t)$ est continue avec une probabilité un.

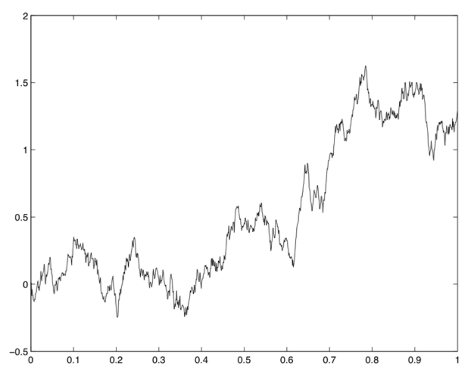

FIGURE 2 – Graphe du mouvement brownien linéaire

Remarque . On peut considérer un mouvement Brownien B qui commence en un réel arbitraire x : $B(t) = x + W(t)$ où W est un mouvement Brownien commencant à l'origine.

Remarque . Dans toute la suite, on considére que les mouvements Browniens commencent à l'origine.

2 Vecteurs Gaussiens

2.1 Définitions et généralités

Définition 2 (Variable aléatoire centrée).
Une variable aléatoire intégrable est dite centrée si $\mathbb{E}[X] = 0$.

Définition 3 (Variable aléatoire gaussienne ou normale).
Une variable aléatoire X suit la loi gausienne $N(m, \sigma^2)$ si sa densité est donnée par

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$$

Proposition 1.
Si X est une variable aléatoire qui suit la loi gaussienne alors :
$\mathbb{E}[X] = m$
$Var(X) = \sigma^2$

Définition 4 (Vecteur gaussien).
Un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)^T$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes suit la loi gaussienne, c'est-á-dire

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \langle a, X \rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$$

est une variable aléatoire réelle gaussienne.

Remarque . On dit que $X = (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien centrée si X_i est une variable aléatoire normale centrée pour tout $i \in \{1; ...; n\}$.

Proposition 2. *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)^T$ est un vecteur gaussien centré si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^d \qquad \mathbb{E}[\exp i\langle a, X \rangle] = \exp(-\frac{1}{2}\alpha^T Q \alpha)$$

avec Q une matrice symétrique définie positive réelle.

2.2 Mouvement Brownien et vecteur aléatoire gaussien

Remarque . Dans cette section, on suppose que le mouvement Brownien existe.

Théorème 1. *Si $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien alors W est un vecteur aléatoire gaussien centré.*

Démonstration. Par indépendance des $W(t_i)$ pour tout $i \in \{0, .., n\}$, par linéarité de l'esprérance, on a

$$\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W(t_k) - W(t_{k-1})))] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\exp(i\alpha_k (W(t_k) - W(t_{k-1})))]$$

. Pour tout $k = 1, ..., n, W(t_k) - W(t_{k-1})$ est une variable aléatoire normale d'espérance 0 et de variance $t_k - t_{k-1}$.
On a donc :

$$\mathbb{E}[\exp(i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W(t_k) - W(t_{k-1})))] = \exp(-\frac{1}{2}\alpha^T M \alpha)$$

où la matrice M est définie par $M_{i,j} = 0$ si $i = j$ et $M_{j,j} = t_j - t_{j-1}$. Donc le vecteur $(W(t_j) - W(t_{j-1}); 1 \geq j \geq n)$ est un vecteur normal centré. Enfin,

$$\forall \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^{n} \beta_k W(t_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (W(t_k) - W(t_{k-1}))$$

avec $\beta_k := \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k W(t_k)$ est une variable aléatoire centrée normale. Donc W est un vecteur gaussien centré. □

Théorème 2. *Si W est un vecteur gaussien centré alors on a les propriétés de convergence suivantes :*

1. $$U_n(t) := \sum_{j=0}^{n-1} [W((\frac{j+1}{n})t) - W((\frac{j}{n})t)] \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$$

2. *Convergence quadratique*
$$V_n(t) := \sum_{j=0}^{n-1} [W((\frac{j+1}{n})t) - W((\frac{j}{n})t)]^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t$$

3 Existence du mouvement Brownien : Construction de Wiener

3.1 Réduction du problème

Tout d'abord, on remarque que construire le mouvement brownien sur l'intervalle $[0;1[$ suffit pour l'avoir sur $\mathbb{R}^+$ tout entier.

Proposition 3. *Si on considère une suite (B_n) de mouvements browniens indépendants et définis sur $[0;1[$, alors la fonction définie $\forall t \in [j;j+1[, \forall j \in \mathbb{N}$ par*

$$W(t) := B_j(t-j) + \sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)$$

est un mouvement brownien défini sur $[0;\infty[$.

Démonstration. En tant que somme finie de gaussiennes normales centrés, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $W(t)$ est une gaussienne normale centrée. W est de plus continue par définition. Il ne manque plus que la covariance pour avoir un mouvement brownien.
Soit $s < t$. Alors soit $\exists$ j $\in \mathbb{N}$ tel que s et t soient dans l'intervalle $[j;j+1[$, soit $\exists$ j<l tels que $s \in [j;j+1[$ et $t \in [l;l+1[$.
Dans le premier cas, on a :

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}\left[\left(B_j(s-j) + \sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right)\left(B_j(t-j) + \sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[B_j(s-j)B_j(t-j)\right] + \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[B_j(s-j)\sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right] + \mathbb{E}\left[B_j(t-j)\sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right]$$

$$= (s-j)\wedge(t-j) + \sum_{k=0}^{j-1}\mathbb{E}[B_k(1)^2] + \sum_{k\neq l}\underbrace{\mathbb{E}[B_k(1)]\mathbb{E}[B_l(1)]}_{=0} + \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right]\underbrace{(\mathbb{E}[B_j(s-j)] + \mathbb{E}[B_j(s-j)])}_{=0}$$

$$= (s-j)\wedge(t-j) + \sum_{k=0}^{j-1}\mathbb{E}[B_k(1)^2] = (s-j) + j = s = s\wedge t$$

Dans le second cas, on trouve de même :

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}\left[\left(B_j(s-j) + \sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)\right)\left(B_l(t-l) + \sum_{k=0}^{l-1} B_k(1)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[B_j(s-j)B_j(1)\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{j-1} B_k(1)^2\right] = (s-j)\wedge 1 + \sum_{k=0}^{j-1}\mathbb{E}[B_k(1)^2] = (s-j) + j = s = s\wedge t$$

□

3.2 Théorème de Wiener

Théorème 3 (Théorème de Wiener)**.**
Soient (X_n) des variables indépendantes et de même loi, d'espérance nulle et de variance 1. On pose $W_n(t) = tX_0 + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(jt\pi)}{j}X_j, \forall t \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$, et on se place dans un espace de probabilités complet. Alors $W_{2^n}(t)$ converge presque sûrement . De plus, cette convergence est uniforme $\forall t \in [0;1]$, et sa limite W est un mouvement brownien défini sur [0 ;1].

Démonstration. Premiere etape : montrons que (W_{2^n}) converge uniformement.
On pose donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1], S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(tk\pi)}{k} X_k$ et on a ${}_n(t) = tX_0 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} S_n(t)$. Montrons que (S_{2^n}) est presque sûrement une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$, uniformément sur $[0;1]$:

$$(S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t))^2 = \left(\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sin(jt\pi)}{j} X_j \right)^2$$

$$\leq \left| \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\exp(ijt\pi)}{j} X_j \right|^2 = (\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\exp(ijt\pi)}{j} X_j)(\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\overline{\exp(ijt\pi)}}{j} X_j)$$

$$\leq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\exp(i(j-k)t\pi)}{jk} X_j X_k = \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{X_j^2}{j^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \exp(ijt\pi) \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{X_{j+k} X_k}{(j+k)k}$$

$$\leq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{X_j^2}{j^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \left| \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{X_{j+k} X_k}{(j+k)k} \right|$$

Ceci est vrai $\forall t \in [0;1]$, on a donc :

$$\| \sup |S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t)| \|_2^2 = \mathbb{E}[\sup |S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t)|^2]$$

$$\leq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \| \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{X_{j+k} X_k}{(j+k)k} \|_2 = \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \sqrt{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \| \frac{X_{j+k} X_k}{(j+k)k} \|_2^2 }$$

La première inégalité étant obtenue grâce à l'inegalité de Minkowski, et la seconde, grâce au théorème de Pythagore pour les variables aléatoires non correlés. On obtient ainsi :

$$\mathbb{E}[\sup |S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t)|^2] \leq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \sqrt{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \| \frac{1}{(j+k)k} \|_2^2 }$$

$$\leq \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{(2^n)^2} + 2 \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{1}{(j+2^n)^2} \sqrt{ \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^2} }$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^{n/2}} \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{1}{(j+2^n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^{n/2}}}_{\text{terme générale d'une série convergente}}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup |S_{2^{n+1}}(t) - S_{2^n}(t)|^2$ converge presque sûrement. Autrement dit, la suite $(S_{2^n}(t))$ converge uniformément $\forall t \in [0;1]$ vers $S_\infty(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt\pi)}{j} X_j$, donc, en particulier, $(W_{2^n}(t))$ converge uniformément sur $[0;1]$. On note W(t) sa limite.

Deuxième étape : montrons que W est bien un mouvement brownien.
Tout d'abord, en tant que limite uniforme de fonction presque sûrement continues, W est presque sûrement continue. De plus, puisque $\forall t \in [0;1], W_{2^n}(t)$ est une gaussienne centrée, W(t) l'est également $\forall t \in [0;1]$, et W(0)=0. Il reste juste à montrer que $\mathbb{E}[|W(t) - W(s)|^2] = t - s$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

$$\mathbb{E}[|W(s) - W(t)|^2] = \mathbb{E}\left[\left| (t-s)X_0 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt\pi) - \sin(js\pi)}{j} X_j \right|^2 \right]$$

$$= (t-s)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(jt\pi) - \sin(js\pi)}{j} \right)^2 = (t-s)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{e^{jt\pi} - e^{-jt\pi} - (e^{js\pi} - e^{-js\pi})}{2j} \right|^2$$

$$= (t-s)^2 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{1}{2}\left(\int_{\pi s}^{\pi t} e^{ijx}dx + \int_{-\pi t}^{-\pi s} e^{ijx}dx\right)\right|^2 = (t-s)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_j(x)dx\right|^2$$

avec $f(x) = 1_{[\pi s;\pi t]}(x) + 1_{[-\pi t;-\pi s]}(x)$ et $\phi_j(x) = \frac{e^{ijx}}{\sqrt{2\pi]}}$, $\forall x \in [-\pi;\pi], \forall j \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{E}[|W(s)-W(t)|^2] = (t-s)^2 + \frac{1}{2\pi}\sum_{j\neq 0}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_j(x)dx\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_j(x)dx\right|^2$$

Par le théorème de Riesz-Fisher, on a donc

$$\mathbb{E}[|W(s)-W(t)|^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = t-s$$

Donc W est bien un mouvement brownien. □

4 Dérivabilité du mouvement Brownien

Théorème 4.
On considère un espace de probabilité complet. Le mouvement Brownien est presque sûrement nulle part dérivable.

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ et soit $n \geq 1$. On restreint l'étude de la non-dérivabilité sur l'intervalle [0 ;1].
Posons

$$E_\lambda^n = \{\omega, \exists s \in [0;1] \sup_{t \in [s-2^{-n};s+2^{-n}]} |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}\}$$

Cet ensemble est mesurable.

Nous allons montrer que $\forall \lambda > 0 \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(E_\lambda^n) < \infty$.
On suppose que :

$$\exists s \in [0;1] \;\; \forall t \in [s - 2^{-n}; s + 2^{-n}] \;\; |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}$$

Alors

$$\exists j \in [|0; 2^n - 1|] \;\; s \in D(j;n) \;\text{ avec }\; D(j;n) = [j2^{-n}; (j+1)2^{-n}]$$

Ainsi

$$\forall t \in D(j;n) \quad |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}$$

On en déduit donc

$$\forall u, v \in D(j;n) \quad |W(u) - W(v)| \leq |W(u) - W(s)| + |W(s) - W(v)| \leq \lambda 2^{-n+1}$$

On construit une subdivision de $D(j;n)$: $D(j;n) = \bigcap_{l=0}^{3} [j2^{-n} + l2^{-(n+2)}; j2^{-n} + (l+1)2^{-(n+2)}]$.
On remarque que les bornes de chaques intervalles appartiennent à $D(j;n)$.
On a

$$\begin{aligned}
E_\lambda^n &= \{\omega, \exists s \in [0;1] \sup_{t \in [s-2^{-n};s+2^{-n}]} |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}\} \\
&\subseteq \{\omega, \exists s \in [0;1] \;\; \exists j \in [|0; ...; 2^n - 1|] \;\; s \in D(j;n) \quad \forall t \in D(j;n) \;\; |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}\} \\
&\subseteq \{\omega, \exists j \in [|0; ...; 2^n - 1|] \;\; \forall t, s \in D(j;n) \;\; |W(s) - W(t)| \leq \lambda 2^{-n}\} \\
&\subseteq \{\omega, \exists j \in [|0; ...; 2^n - 1|] \;\; \forall l \in [|0; ...; 3|] \;\; |\Delta_{j,l}^n| \leq \lambda 2^{-n+1}\}
\end{aligned}$$

avec $\Delta_{j,l}^n = W(j2^{-n} + (l+1)2^{-(n+2)}) - W(j2^{-n} + l2^{-(n+2)})$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_\lambda^n) &\leq \mathbb{P}(\bigcup_{j=0}^{2^n-1} \bigcap_{l=0}^{3} |\Delta_{j,l}^n| \leq \lambda 2^{-n+1}) \\
&\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{l=0}^{3} |\Delta_{j,l}^n| \leq \lambda 2^{-n+1})
\end{aligned}$$

par independance des $\Delta_{j,l}^n$

$$\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} \prod_{l=0}^{3} \mathbb{P}(|\Delta_{j,l}^n| \leq \lambda 2^{-n+1})$$

Or d'après les propriétés du mouvement Brownien : $\Delta_{j,l}^n \sim W(2^{-(n+2)}$.
Donc $\Delta_{j,l}^n \sim N(0; 2^{-(n+2)})$.

On calcule alors :

$$\forall \beta > 0 \quad \mathbb{P}(|\Delta_{j,l}^n| \leq \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \exp(-\frac{x^2}{2 \times 2^{-(n+2)}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{-\frac{n+2}{2}}} dx$$

On réalise le changement de variable suivant : $u^2 = \dfrac{x^2}{2^{-(n+2)}}$

$$\begin{aligned} \forall \beta > 0 \quad \mathbb{P}(|\Delta_{j,l}^n| \leq \beta) &= \int_{-\beta 2^{(n+2)/2}}^{\beta 2^{(n+2)/2}} \exp(-\frac{u^2}{2}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\ &\leq \beta 2^{(n+2)/2} \end{aligned}$$

En particulier pour $\beta = \lambda 2^{-n+1}$:

$$\mathbb{P}(|\Delta_{j,l}^n| \leq \lambda 2^{-n+1}) \leq \lambda 2^{n/2+2}$$

Enfin,

$$\mathbb{P}(E_\lambda^n) \leq 256 \ \lambda^4 \ 2^{-n}$$

Conclusion : $\forall \lambda > 0, \quad \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(E_\lambda^n) < \infty$.
D'après le lemme de Borel-Cantelli, seul un nombre fini de E_λ^n se réalise. On a donc :

$$\inf_{s \in [0;1]} \sup_{|t-s| \leq 2^{-n}} \frac{|W(s) - W(t)|}{|s-t|} \geq \inf_{s \in [0;1]} \sup_{|t-s| \leq 2^{-n}} \frac{|W(s) - W(t)|}{2^{-n}} \geq \lambda$$

Par l'absurde, montrons que W est presque sûrement nulle part dérivable sur [0 ;1].
Si $W'(s)$ existe $\forall s \in [0;1]$ alors $|W'(s)| \geq \lambda$ $p.s.$
Ceci étant vraie pour tout $\lambda > 0$, on a alors $|W'(s)| = \infty$ $p.s.$ Absurde.
Conclusion : W n'est presque sûrement dérivable sur [0 ;1].

Donc W n'est presque sûrement pas dérivable sur [0 ;c] pour tout $c > 0$.

Conclusion : W est presque surement nulle part dérivable. □

Remarque . L'hypothèse de compétude de l'espace de probabilité n'est pas contraignante. On peut compléter l'espace sans hypothèse supplémentaire.

5 Bibliographie

1. Davar Khoshnevisan ; "Graduate Studies in Mathematics," American Mathematical Society, RI (hardback, 2007), Chapter 9 : Brownian Motion (pages 159-170)
2. Daniel Revuz et Marc Yor ; "Continuous martingales and Brownian Motion" Third edition, Canonical Processus and Gaussian Processes (page 33)
3. Figure 1 : d'après une étude de Jean Perrin, "Revue pour la science"
4. Figure 2 : http ://images.math.cnrs.fr/Le-mouvement-brownien-et-son-histoire.html , 15 octobre 2006