Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Leçons : 207, 223, 230, 235, 241, 243, 244

[Gou An], exercices 4.4.10-11

Théorème (*Abel angulaire*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$ et telle que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.
On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$, on fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose :

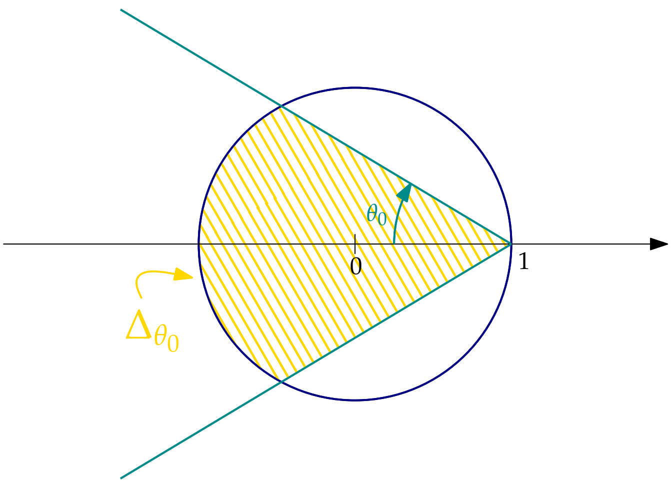
$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\} \cap \left\{1 - \rho e^{i\theta} \,\middle|\, \rho \in \mathbb{R}^{+*}, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\right\}.$$

Alors on a : $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.[1]

Démonstration :

→ Soient $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ et $R_N = S - S_N$, pour $N \in \mathbb{N}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, avec $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) + a_0 - a_0 \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n+1} - 1\right) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n \left(z^{n+1} - z^n\right) - R_N \left(z^N - 1\right) + 0R_0 \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N \left(z^N - 1\right)
\end{aligned}$$



Donc, par passage à la limite $N \to +\infty$, on obtient :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n \qquad (1)$$

→ Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |R_n| < \varepsilon$.
Alors, pour $|z| < 1$, d'après (1), on a :

$$|f(z) - S| \leqslant |z-1| \left|\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right| + |z-1|\varepsilon \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n\right) \leqslant |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|\right) + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (2)$$

→ Soit $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_{\theta_0}$, où $\rho > 0$ et $|\varphi| \leqslant \theta_0$.
Alors $|z|^2 = \left(1 - \rho e^{i\varphi}\right)\left(1 - \rho e^{-i\varphi}\right) = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$.
Mais quand $z \to 1$, $\rho \to 0$ et pour $\rho \leqslant \cos\theta_0$, on a :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = (1+|z|)\frac{|z-1|}{1-|z|^2} \leqslant 2\frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2} \leqslant \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

1. On a quelques applications de ce résultat : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

→ Soit $\alpha > 0$, tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$.
Alors, quand $z \in \Delta_{\theta_0}$ est tel que $|z-1| \leqslant \min\{\alpha, \cos\theta_0\}$, par (2) :

$$|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\cos\theta_0}$$

■

Théorème (*Taubérien faible*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\geqslant 1$, on note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$.
On suppose : $\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S$.
Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ [2], alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. [3]

Démonstration :

→ Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n$ et pour $x \in]0,1[$, on a :

$$S_N - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - x^n\right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-x^n) = (1-x)\left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right) \leqslant (1-x)n$.
Ainsi :

$$|S_N - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} n\,|a_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{N}\,|a_n|\,x^n \leqslant (1-x)MN + \sup_{n>N}\left(n\,|a_n|\right)\frac{1}{N(1-x)},$$

où M est un majorant de la suite $(n\,|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, suite qui tend vers 0.

→ Soit $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < 1$. On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leqslant \varepsilon M + \sup_{n>N}\left(n\,|a_n|\right)\frac{1}{\varepsilon}.$$

→ Dès lors, si N_0 est tel que $\sup_{n>N_0}\left(n\,|a_n|\right) < \varepsilon^2$, alors :

$$\forall N \geqslant N_0, \left|S_N - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

Par hypothèse, on a : $\lim_{N\to\infty} f\left(1 - \frac{\varepsilon}{N}\right) = S$, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall N \geqslant N_1, \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{N}\right) - S\right| \leqslant \varepsilon$.
En fin de compte, par inégalité triangulaire, il vient :

$$\forall N \geqslant \max\{N_0, N_1\}, |S_N - S| \leqslant (M+2)\varepsilon.$$

■

Références

[Gou An] X. GOURDON – *Les maths en tête : Analyse*, 2e éd., Ellipses, 2008.

2. Cette condition s'appelle condition taubérienne.

3. Il s'agit d'une réciproque partielle au théorème d'Abel angulaire. Il reste vrai en supposant seulement $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, et constitue alors le théorème taubérien fort, dont la démonstration est très différente. La réciproque totale du théorème d'Abel angulaire est fausse, comme le montre le contre-exemple suivant : $\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ alors que $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge.