Théorème de Bernstein (sur les séries entières)

Leçons : 244, *218, 224, 241, 243*

[Gou An], exercice 4.4.8

Théorème

Soit $a > 0$, $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(2k)}(x) \geqslant 0$.
Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$, ie analytique sur $]-a, a[$.

Démonstration :

Soit $b \in]0, a[$, on va d'abord montrer que f est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence supérieur ou égal à b.

Étape 1 : On va d'abord montrer un résultat similaire pour une fonction auxiliaire.

Soit $F : \left| \begin{array}{ccc}]-a, a[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + f(-x) \end{array} \right.$.

F est paire et donc : $\forall k \in \mathbb{N}, F^{(2k+1)}$ est impaire, d'où $F^{(2k+1)}(0) = 0$.

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b]$,

$$F(x) = F(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0) + R_n(x) \text{ où } R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}, F^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0) + (-1)^{2k}f^{(2k)}(0) = 2f^{(2k)}(0) \geqslant 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b], R_n(x) \leqslant F(x)$.

On a finalement :

$$0 \leqslant R_n(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{b-t}\right)^{2n+1} \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \underset{1}{\leqslant} \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(b-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} R_n(b) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^{2n+1} F(b)$$

Donc, pour $x \in [0, b[$, $\frac{x}{b} \in [0, 1[$ et $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Dès lors : $\forall x \in [0, b[, F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$, puis, par parité : $\forall x \in]-b, b[, F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$.

Étape 2 : Montrons désormais le résultat pour f.

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a : $\forall x \in]-b, b[, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(0) + r_n(x) \text{ où } r_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\forall t \in [0, x], F^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) + (-1)^{2n+2}f^{(2n+2)}(-t) \geqslant f^{(2n+2)}(t) \geqslant 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors :

$$|r_n(x)| \leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|f^{(2n+2)}(t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t = R_n(x)$$

Et si $x < 0$, alors :

$$|r_n(x)| \leqslant \int_x^0 \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}\left|f^{(2n+2)}(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{(t-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_{-x}^0 \frac{(-u-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(-u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^{-x} \frac{(-x-u)^{2n+1}}{(2n+1)!}\underbrace{F^{(2n+2)}}_{\text{paire}}(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\leqslant R_n(-x)$$

1. On a $\frac{x-t}{b-t} \leqslant \frac{x}{b}$ car $\frac{x-t}{b-t} = 1 + \frac{x-b}{b-t}$ est décroissante en $t \in [0, x]$.

Donc $\forall x \in]-b,b[, \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $S_p : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$; on a montré : $\forall x \in]-b,b[, \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}(x) = f(x)$.

Or $S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2}\frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(2n)}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car F est développable en série entière en 0 avec un rayon supérieur ou égal à b.

Dès lors : $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}(x) = f(x)$ pour $x \in]-b,b[$.

Et donc f est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence supérieur ou égal à b.

On a donc montré pour l'instant que f est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence égal à a.

Soit alors $x_0 \in]-a,a[$, on pose alors : $g : \left| \begin{array}{ccc}]|x_0|-a, a-|x_0|[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x_0+x) \end{array} \right.$.

Alors g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]|x_0|-a, a-|x_0|[$, avec $a-|x_0| > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, g^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(x_0+x) \geqslant 0$.

Ce qu'on vient de faire permet de montrer que g est développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence égal à $a-|x_0|$.

On en déduit alors que f est analytique sur $]-a,a[$.[2] ∎

Références

[Gou An] X. GOURDON – *Les maths en tête : Analyse*, 2e éd., Ellipses, 2008.

2. On dispose d'une application : tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet, tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, $\tan' = 1 + \tan^2$ et par Leibniz, on obtient : $\tan^{(n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or, tan est impaire, donc les dérivées d'ordre impair de tan sont paires ; on en déduit qu'elles sont positives sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par le théorème de Bernstein, $\tan'$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc tan l'est aussi.