Théorème de Burnside [1]

Leçons : 104, 106, 157, *153*

[X-ENS Al2], exercices 3.8, 2.28 et 1.10

Théorème

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Si G est d'exposant fini (c'est-à-dire : $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^N = \mathrm{I}_n$),
Alors G est fini.

Démonstration :

Étape 1 : On commence par montrer un lemme.

Lemme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$;
Alors A est nilpotente.

Démonstration :
χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$; par l'absurde, on suppose que A n'est pas nilpotente.
Alors A possède des valeurs propres non-nulles, qu'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$, évidemment toutes non-nulles. Ainsi :
$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PTP^{-1}$, où $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulaire de diagonale $(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r}, 0, \dots, 0)$.

De plus, $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = PT^kP^{-1}$, d'où $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. En 1902, William Burnside pose le problème suivant "Est-ce que les groupes de torsion de type fini sont tous finis ?" (c'est le problème de Burnside).

Un rappel : un groupe de torsion est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre fini. Par Lagrange, les groupes finis sont de torsion ; mais il existe des groupes infinis qui soient de torsion, comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par exemple.

La question de Burnside se réécrit alors "Est ce que les groupes possédant un nombre fini de générateurs et dont tous les éléments sont d'ordre fini sont tous finis ?"

Conscient de la difficulté de sa conjecture, il en émet une plus faible, dite "bornée" : "Est-ce que les groupes d'exposant fini possédant un nombre fini de générateurs sont tous finis ?"

Remarque : $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion, mais il n'est pas d'exposant fini.

En 1905, il démontre que tout sous-groupe d'exposant fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fini, sans supposer qu'il soit de type fini (c'est ce développement).

Un énoncé équivalent est que toute représentation d'un groupe d'exposant fini dans un espace vectoriel complexe de dimension finie est d'image finie. Ceci met en évidence la difficulté de construire un contre-exemple à sa conjecture : il faut, d'après son théorème, qu'un tel groupe n'ait aucune représentation fidèle de degré fini.

En 1911, Issai Schur va même plus loin en montrant que tout sous-groupe de torsion de type fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fini, donnant un résultat analogue à celui de 1905 pour la version "non-bornée" de la conjecture. C'est en 1964 que la conjecture de Burnside est réfutée pour sa version "non-bornée", puis en 1968 pour la version "bornée". Ces résultats des années 1960 ont apporté des contre-exemples uniquement pour des groupes d'exposant impair ; c'est en 1992 qu'un contre-exemple d'exposant pair a été construit. On sait aujourd'hui construire pour tout entier n impair supérieur ou égal à 665 un groupe infini de type fini et d'exposant n, et on sait qu'il existe un entier n supérieur ou égal à 2^{48} et divisible par 2^9, tel qu'il existe un groupe infini de type fini et d'exposant n.

D'autres résultats ont été montré à propos de cette conjecture, mais il reste encore aujourd'hui des problèmes ouverts à ce sujet.

En conclusion, l'intérêt du théorème de 1905 est d'avoir apporté une condition nécessaire que doit vérifier un contre-exemple à la conjecture bornée de 1902.

Diffusion à titre gratuit uniquement.

Par déterminant de Vandermonde [2], le déterminant de ce système vaut $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$.

On a donc unicité de la solution, et nécessairement : $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$. ■

Étape 2 : Soit $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une base de Vect(G) et $f : \left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto & (\mathrm{tr}\,(AM_i))_{1 \leqslant i \leqslant m} \end{array} \right.$.

On va montrer que si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - \mathrm{I}_n$ est nilpotente.
Supposons donc $f(A) = f(B)$; par linéarité de la trace on a : $\forall M \in \mathrm{Vect}(G), \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$.
Soit $D = AB^{-1} \in G$, $k \in \mathbb{N}^*$; on a $B^{-1}D^{k-1} \in G$, d'où :

$$\mathrm{tr}\left(D^k\right) = \mathrm{tr}\left(AB^{-1}D^{k-1}\right) = \mathrm{tr}\left(BB^{-1}D^{k-1}\right) = \mathrm{tr}\left(D^{k-1}\right).$$

On en déduit : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{tr}\left(D^k\right) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{I}_n) = n$.
Puis, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{tr}\left((D - \mathrm{I}_n)^k\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (-1)^j D^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (-1)^j \mathrm{tr}\left(D^{k-j}\right) = n \sum_{j=0}^{k} \binom{j}{k} (-1)^j = n(1-1)^k = 0.$$

Le lemme précédent permet alors de montrer que $D - \mathrm{I}_n$ est nilpotente.

Étape 3 : Montrons désormais que f est injective, ie $A = B$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ l'exposant de G, ainsi, $X^N - 1$ annule toutes les matrices de G.
C'est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, et donc : $\forall M \in G, M$ est diagonalisable.
Donc D est diagonalisable, mais $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), P\,(D - \mathrm{I}_n)\,P^{-1} = PDP^{-1} - \mathrm{I}_n$.
Donc $D - \mathrm{I}_n$ est diagonalisable.
Mais $D - \mathrm{I}_n$ est déjà nilpotente, dès lors : $D - \mathrm{I}_n = 0$. D'où $A = B$.

Étape 4 : Reste à conclure.
On note $X = \{\mathrm{tr}A | A \in G\}$; on a : $f(G) \subset X^m$.
Comme les valeurs propres des éléments de G sont des racines $N^{\text{èmes}}$ de l'unité, on obtient que X est fini.
Puis, par injectivité de f, on obtient que G est fini. ■

Références

[X-ENS Al2] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 2*, 2$^{\text{ème}}$ éd., Cassini, 2009.

2. Calculons le déterminant $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Si deux des x_i sont égaux, alors $V(x_1, \ldots, x_n) = 0$, car deux lignes sont identiques.
Supposons donc les x_i deux à deux distincts, on pose : $P(X) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}, X)$.
C'est un polynôme de degré au plus $n - 1$; en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient que le coefficient en X^{n-1} est $V(x_1, \ldots, x_{n-1})$.
On a : $\forall i \in [\![1, n-1]\!], P(x_i) = 0$, car alors deux lignes sont égales.
Les x_i étant deux à deux distincts, on a : $\prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i) \Big| P$, et $\prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$ est un polynôme unitaire de degré $n - 1$.
Il en résulte que : $P(X) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - x_i)$; en particulier : $P(x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$.
Par récurrence, on en tire la formule de Vandermonde : $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(x_j - x_i\right)$.

Diffusion à titre gratuit uniquement.