Théorème de Carathéodory

Leçons : ***181***

[TauGéo], résultats 4.3.5-4.3.6

Théorème

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, d'espace vectoriel associé E, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, avec $\mathcal{A} \neq \varnothing$.
Tout élément de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$, avec $k \leqslant 1 + \dim \mathcal{E}$.

Démonstration :

Soit $M \in \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$; par définition de l'enveloppe convexe, M est combinaison convexe d'un nombre fini de points de $\mathcal{A}$, notés $A_1, \ldots, A_k$.

On a donc : $M = t_1 A_1 + \ldots + t_k A_k$, avec $0 \leqslant t_1, \ldots, t_k \leqslant 1$ et $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$.

On suppose que $k > 1 + \dim \mathcal{E}$, puisque sinon, on est content.

La famille $\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_1A_k}\right)$ est liée, car elle possède au moins $(1 + \dim E)$ vecteurs de E.

En conséquence, il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non-tous nuls, tels que : $\lambda_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{A_1A_k} = \overrightarrow{0}$.

On pose alors $\mu_1 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ et pour $i \in [\![2, k]\!]$, $\mu_i = -\lambda_i$.

On a alors : $\mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \mu_k \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0}$, où O est un point quelconque, fixé, de $\mathcal{E}$.

Comme $\mu_1 + \ldots + \mu_k = 0$, et que les μ_i ($i \in [\![1, k]\!]$) sont non-tous nuls, on sait que : $\exists j \in [\![1, k]\!], \mu_j > 0$.

On pose alors $\lambda = \min \left\{ \dfrac{t_i}{\mu_i} \middle| \mu_i > 0 \right\}$, puis, pour $i \in [\![1, k]\!]$, $v_i = t_i - \lambda \mu_i$.

De cette façon, $v_1, \ldots, v_k \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} t_i - 0 = 1$.

Aussi, $\exists q \in [\![1, k]\!], \lambda = \dfrac{t_q}{\mu_q}$, d'où $v_q = 0$.

Ainsi, $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i} + \lambda \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{k} v_i \overrightarrow{OA_i}$.

Donc $M = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{k} v_i A_i$, donc M est combinaison convexe de $(k-1)$ points de $\mathcal{A}$.

Donc M peut s'écrire (en itérant) comme combinaison convexe d'au plus $(1 + \dim \mathcal{E})$ points. ■

Corollaire

Sous les mêmes hypothèses :

1. si $\mathcal{A}$ est compact, alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est compact ;
2. si $\mathcal{A}$ est borné, alors $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est borné et de même diamètre que $\mathcal{A}$: $\delta(\mathcal{A}) = \delta(\mathrm{Conv}(\mathcal{A}))$.

Démonstration :

1. On pose $n = \dim \mathcal{E}$, et $K = \left\{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} \middle| t_1 + \ldots + t_{n+1} = 1\right\}$.
   K est compact ; on définit : $f : \left| \begin{array}{ccc} K \times \mathcal{E}^{n+1} & \to & \mathcal{E} \\ (t_1, \ldots, t_{n+1}, A_1, \ldots, A_{n+1}) & \mapsto & t_1 A_1 + \ldots + t_{n+1} A_{n+1} \end{array} \right.$.
   D'après le théorème de Carathéodory, $f\left(K \times \mathcal{A}^{n+1}\right) = \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$.
   Or f est continue, et $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est compact, donc $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est compact.
2. Comme $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, on a : $\delta(\mathcal{A}) \leqslant \delta(\mathrm{Conv}(\mathcal{A}))$.
   Comme $\mathcal{A}$ est borné, il existe $A \in \mathcal{A}$ et $r > 0$, tels que $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{B}}(A, r)$.
   Comme $\overline{\mathcal{B}}(A, r)$ est convexe, on a : $\mathrm{Conv}(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{B}}(A, r)$.
   Ainsi, $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est borné.

   Soit $M \in \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, $M = t_1 A_1 + \ldots + t_k A_k$, où $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$, $t_1, \ldots, t_k \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$.

Soit $N \in \mathcal{A}$, on a : $MN \leqslant t_1 A_1 N + \ldots + t_k A_k N \leqslant \delta(\mathcal{A})\,(t_1 + \ldots + t_k) = \delta(\mathcal{A})$.
Ainsi, la distance d'un point quelconque de $\mathcal{A}$ à un point quelconque de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est inférieure à $\delta(\mathcal{A})$.
Soit alors $P \in \mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, $MP \leqslant t_1 A_1 P + \ldots + t_k A_k P \leqslant \delta(\mathcal{A})\,(t_1 + \ldots + t_k) = \delta(\mathcal{A})$.
Puis, par passage à la borne supérieure, $\delta(\mathrm{Conv}(\mathcal{A})) \leqslant \delta(\mathcal{A})$ donc $\delta(\mathrm{Conv}(\mathcal{A})) = \delta(\mathcal{A})$. ■

Références

[TauGéo] P. TAUVEL – *Géométrie*, 2e éd., Dunod, 2005.