Équation de la chaleur sur un anneau

Leçons : 222, 246, *235, 241*

[X-ENS An4], exercice 1.28

Théorème

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non-nulle, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et 2π-périodique.
Alors il existe une unique solution au problème $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ qui soit 2π-périodique par rapport à x et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Démonstration :

Analyse : Soit u une solution du problème posé.
Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et $\mathcal{C}^\infty$, et donc elle est somme de sa série de Fourier !

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \text{ avec } c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z}.$$

Montrons que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ s'obtient par dérivation formelle de cette expression.
Comme pour u, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \text{ avec } \tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x, n \in \mathbb{Z}.$$

Or $(t,x) \mapsto u(t,x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ admet une dérivée partielle par rapport à t qui soit continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi]$.
Donc c_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $c_n'(t) = \tilde{c}_n(t)$, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Similairement, pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ est somme de sa série de Fourier, et par double intégration par parties :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

À t fixé, toutes les séries considérées convergent normalement (séries de Fourier de fonctions continues et $\mathcal{C}^1$ par morceaux).
Désormais le problème s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_n'(t) + n^2 c_n(t) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Ainsi, pour $p \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_n'(t) + n^2 c_n(t) \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}x \underset{\text{(cvn)}}{=} \sum_{n=-\infty} +\infty \left(c_n'(t) + n^2 c_n(t) \right) \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)x} \,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left(c_p'(t) + p^2 c_p(t) \right). \end{aligned}$$

En d'autres termes : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0$.
Ce qui nous donne donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, c_n(t) = \alpha_n \mathrm{e}^{-n^2 t}$.
Mais u_0 est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc somme de sa série de Fourier.

On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}$.
En appliquant Parseval à la fonction $u_0 - u_t$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 \, dx.$$

Notamment, $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, |C_n - c_n(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(0,x) - u(t,x)|^2 \, dx$.
On va utiliser le théorème de convergence dominée :
- d'une part, $(t,x) \mapsto |u(0,x) - u(t,x)|^2$ est continue sur le compact $[0,1] \times [0,2\pi]$, donc bornée, donc majorée par une fonction intégrable sur $[0,2\pi]$ et indépendante de t ;
- d'autre part, $\forall x \in [0,2\pi], |u(0,x) - u(t,x)|^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on obtient : $\int_0^{2\pi} |u(0,x) - u(t,x)|^2 \, dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui fournit ensuite, en utilisant la continuité de la fonction c_n sur $\mathbb{R}^+$:

$$C_n = \lim_{t\to 0} c_n(t) = c_n(0) = \alpha_n.$$

Ainsi, si u est solution du problème posé, alors on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$, où les C_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

Synthèse : Montrons que la fonction $u : (t,x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ convient.

On a : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, \left| C_n e^{-n^2 t} e^{inx} \right| \leqslant |C_n|$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| < +\infty$ car u_0 est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Donc la série définissant u converge normalement, donc u est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, car $\forall n \in \mathbb{Z}, (t,x) \mapsto C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ est continue.
Aussi, $\forall t \in \mathbb{R}^+, u_t$ est 2π-périodique.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} \left(C_n e^{-n^2 t} e^{inx} \right) = (-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$.
Soit $t_0 > 0$, $\forall t > t_0, \left| (-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx} \right| \leqslant n^{2k+l} K e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où on a utilisé l'inégalité :

$$|C_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{i(k-n)x} \, dx \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u_0(x) e^{-inx} \, dx \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x)| \, dx =: K.$$

Ceci est donc le terme d'une série normalement convergente sur $]t_0, +\infty[$; la dérivation formelle y est donc autorisée ; mais t_0 étant arbitraire, on obtient que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et que :

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

D'où, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; u est donc solution du problème posé. ■

Références

[X-ENS An4] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 4*, 1e éd., Cassini, 2012.