Formule des compléments

Leçons : 236, 245, *207, 235, 239*

[AM], section 8.4.4

Théorème

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

On commence par montrer le lemme qui suit.

Lemme

On a l'égalité suivante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration du lemme :

$\forall \alpha \in]0,1[$, on définit $I_\alpha := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t)}$.

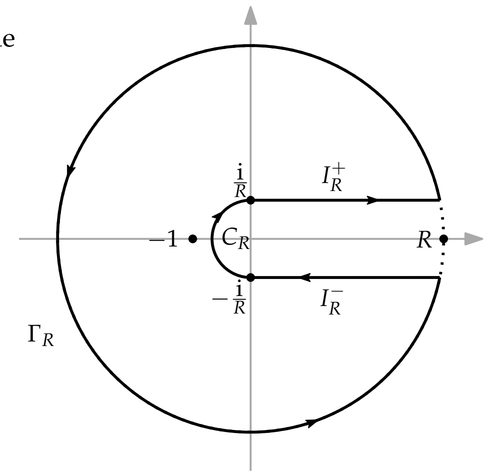
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

- $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (donc localement intégrable) ;
- En 0 : $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;
- En $+\infty$: $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array}\right.$, où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}$ quand $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta \in]0,2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega\backslash\{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to-1}(1+z)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$, on définit le chemin $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$, où :

- $C_R = \left\{\dfrac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \middle| \theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]\right\}$;
- $I_R^\pm = \left[\pm\dfrac{\mathrm{i}}{R}, \pm\dfrac{\mathrm{i}}{R} + \sqrt{R^2 - \dfrac{1}{R^2}}\right]$;
- $\Gamma_R = \left\{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \middle| \theta \in [\theta_R, 2\pi - \theta_R]\right\}$, avec $\theta_R = \arcsin \dfrac{\frac{1}{R}}{R}$.

Le théorème des résidus donne donc :

$$\forall R > 1, \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$$

On va passer à la limite quand $R \to +\infty$.
Tout d'abord :

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{i}\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^{\alpha}\left|1+\frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \pi\frac{\left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{R}} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Aussi :

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_R,2\pi-\theta_R]}(\theta)\frac{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}\left(1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R}{R^{\alpha}\left|1+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus : $\displaystyle\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{\mathrm{i}}{R}\right)^{\alpha}\left(1+t+\frac{\mathrm{i}}{R}\right)}\,\mathrm{d}t.$

Comme $\displaystyle\left(t+\frac{\mathrm{i}}{R}\right)^{\alpha} = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}}\exp\left(\mathrm{i}\arctan\frac{\frac{1}{R}}{t}\right)\right)^{\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^{\alpha}$, on a :

- $\displaystyle\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t)f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$;
- $\displaystyle\left|\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t)f\left(\frac{\mathrm{i}}{R}+t\right)\right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^{\alpha}(1+t)}$ qui est intégrable.

Par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = I_{\alpha}$$

Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $\displaystyle\left(t-\frac{\mathrm{i}}{R}\right)^{\alpha} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} t^{\alpha}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha}$, on a :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\alpha}I_{\alpha}$$

Donc $\left(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\alpha}\right)I_{\alpha} = 2\mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}$, c'est-à-dire :

$$I_{\alpha} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

■

Démonstration du théorème :

D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t-s}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha}\mathrm{e}^{-(s+t)}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\begin{cases} u = s+t \\ v = \frac{s}{t}\end{cases}$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t}+\frac{s}{t^2} = \frac{1}{t}+\frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{v^{\alpha}(v+1)}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^{\alpha}(v+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

■

Références

[AM] É. AMAR et É. MATHERON – *Analyse complexe*, Cassini, 2004.