Densité des fonctions continues nulle part dérivables

Leçons : 201, 202, 205, 208, 228, *213*

[ZQ], Section VIII.I.4.e

Théorème

L'ensemble A des fonctions continues sur $[0,1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty\right)$.[1]

Démonstration :

Comme $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ est un espace de Banach, on va utiliser le lemme de Baire pour montrer $\overline{A} = E$.
Plus précisément, on va exhiber une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est fermé ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n est d'intérieur vide ;
- $A^c \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Alors on aura montré que A^c est d'intérieur vide dans E.
On pose $F_n = \{f \in E \mid \exists x \in I, \forall y \in I, |f(y) - f(x)| \leqslant n|y-x|\}$, où I désigne l'intervalle $[0,1]$.

Étape 1 : Montrons d'abord que $A^c \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Soit $f \in A^c$, alors f est dérivable en au moins un point $x_0 \in I$.
Ainsi la quantité $\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}$ est bornée quand $y \to x_0$.
Et f étant continue sur I, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall y \in I, \left|\dfrac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}\right| \leqslant N$ et donc $f \in F_N$.
Ainsi, $A^c \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Étape 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on va maintenant montrer que F_n est fermé.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite dans F_n qui converge vers $f \in E$.
Comme les f_k sont dans F_n, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in I, \forall y \in I, |f_k(x_k) - f_k(y)| \leqslant n\,|x_k - y| \tag{1}$$

Et comme I est compact, il existe une extraction $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in I$.
Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x)\right| \leqslant \underbrace{\left|f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) - f\left(x_{\varphi(k)}\right)\right|}_{\leqslant \|f_{\varphi(k)} - f\|_\infty \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\left|f\left(x_{\varphi(k)}\right) - f(x)\right|}_{\substack{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ (f \text{ est continue})}}$$

Donc, $\lim\limits_{k\to\infty} f_{\varphi(k)}\left(x_{\varphi(k)}\right) = f(x)$.
Dès lors, par passage à la limite dans (1), on obtient : $\forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant n|x-y|$, donc $f \in F_n$, puis F_n est fermé.

Étape 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va finalement montrer que F_n est d'intérieur vide.

Comme E est métrique, on va montrer qu'il n'existe pas de boule ouverte $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \subset F_n$ avec $f \in F_n$ et $\varepsilon > 0$, ie :

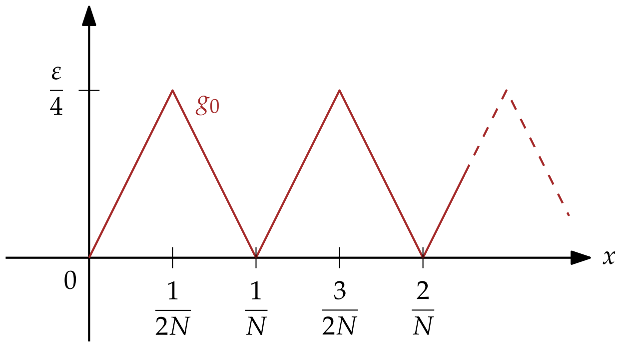
$$\forall f \in F_n, \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(f,\varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$$

---

1. Quand on fait ce développement, il faut absolument être capable de donner un exemple d'une telle fonction ; allez, c'est le cadeau de la maison : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\{2^n x\}}{2^n}$, où $\{x\}$ désigne la distance de x à son entier le plus proche. Par ailleurs, une fois qu'on a montré que cette fonction est continue et nulle part dérivable, le théorème de Weierstrass implique le résultat du développement. Une application de ce théorème est de montrer que toute fonction continue s'écrit comme somme de deux fonctions continues nulle part dérivables.

Soit donc $f \in F_n$, et $\varepsilon > 0$.
Par le théorème de Weierstrass : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \|P - f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ (à qui on imposera une condition par la suite) ; on définit g_0, fonction périodique de période $\frac{1}{N}$ telle que :

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2N}\right] \\ \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon N}{2} x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right] \end{cases}$$



g_0 est continue et $\|g_0\|_\infty = \frac{\varepsilon}{4}$.

On pose $g = P + g_0$; on a : $\|f - g\|_\infty = \|f - P - g_0\|_\infty \leqslant \|f - P\|_\infty + \|g_0\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$.
Donc $g \in \mathcal{B}(f, \varepsilon)$.
On a, pour tous $x, y \in I$: $|g(x) - g(y)| \geqslant |g_0(x) - g_0(y)| - |P(x) - P(y)|$.
De plus, pour $x \in I$, il existe $k \in [\![0, 2N-1]\!]$, tel que $x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$.
Puis, soit $y_x \in \left[\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N}\right]$, alors on a : $|g_0(x) - g_0(y_x)| = \frac{\varepsilon N}{2} |x - y_x|$.
Et par le théorème des accroissements finis, on a : $|P(x) - P(y_x)| \leqslant \|P'\|_\infty |x - y_x|$.
Par conséquent : $\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x) - g(y_x)| \geqslant \left(\frac{\varepsilon N}{2} - \|P'\|_\infty\right) |x - y_x|$.

On se rend alors compte qu'il suffit d'imposer $\frac{\varepsilon N}{2} - \|P'\|_\infty > n$, ie $N > \frac{2(n + \|P'\|_\infty)}{\varepsilon}$ dès le début pour avoir :

$$\forall x \in I, \exists y_x \in I, |g(x) - g(y_x)| > n |x - y_x|$$

Ainsi, $g \in F_n^c$, et finalement $\mathcal{B}(f, \varepsilon) \cap F_n^c \neq \varnothing$. ■

Références

[ZQ] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY – *Analyse pour l'agrégation*, 4e éd., Dunod, 2013.