Réduction des endomorphismes normaux [1]

Leçons : 150, 151, 153, 154, 155, 160, *101*, *158*

[Gou Al], section 5.3.2

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.
Alors, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, dans laquelle la matrice de f est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de type $(*)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{matrix}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & \boxed{\begin{matrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Démonstration :

On va d'abord énoncer et montrer deux lemmes.

Lemme 1

1. Soit F un sous-espace vectoriel stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par u^*.
2. Soit E_λ un sous-espace propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, endomorphisme normal.
   Alors E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont stables par u et u^*.

Démonstration du lemme 1 :

1. On a : $\forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \langle x, u^*(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$, car $u(x) \in F$. Donc $\forall y \in F^\perp, u^*(y) \in F^\perp$.
2. D'abord E_λ est stable par u, donc on vient de montrer que $E_\lambda^\perp$ est stable par u^*.
   On a : $\forall x \in E_\lambda, u\left(u^*(x)\right) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x)$, donc $u^*(x) \in E_\lambda$.
   Donc E_λ est stable par u^*, donc par la première partie du lemme : $E_\lambda^\perp$ est stable par $u^{**} = u$. ∎

Lemme 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \varnothing$.
Alors dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $b \neq 0$.

Démonstration du lemme 2 :

Écrivons $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \varnothing$, on a nécessairement $b \neq 0$.

Par normalité, on a : $MM^* = M^*M$, on a : $\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & a^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

Donc $b = \pm c$.

↪ Si $b = c$, alors M est symétrique réelle ; mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \varnothing$. Contradiction. [2]

↪ Donc $b = -c$, et alors : $ab + cd = ac + bd$ donne $2(a-d)b = 0$ donc $a = d$. ∎

1. On ne prendra pas le temps d'écrire l'énoncé au tableau. Dans le plan de la leçon 150, on énoncera le résultat ainsi : "Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice normale ; alors, sous l'action par conjugaison induite par $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, l'orbite de M contient une matrice de type $(*)$". On ne démontrera pas le lemme 2.

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors S admet une valeur propre réelle. En effet, S est une matrice complexe, donc admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, associée à un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. De l'égalité $Sx = \lambda x$, on déduit :

$$\lambda \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \lambda\, {}^t x \overline{x} = \left({}^t x S\right) \overline{x} = {}^t x \left(S \overline{x}\right) = \overline{\lambda}\, {}^t x \overline{x} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^n |x_k|^2.$$

Et comme $x \neq 0$, on en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$, autrement dit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On procède par récurrence forte sur $n = \dim E$.

- Pour $n = 1$, le résultat est trivial.
- Soit $n \geqslant 2$. On a deux cas.

Cas 1 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \neq \varnothing$. Soit alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$.
Par le lemme 1, $E_\lambda^\perp$ est stable par f et f^*, donc $f|_{E_\lambda^\perp}$ est normal[3].
Comme $\dim E_\lambda^\perp \leqslant n-1$, par récurrence, il existe $\mathcal{B}_2$ une base orthonormale de $E_\lambda^\perp$ telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2}\left(f|_{E_\lambda^\perp}\right)$ soit de la forme $(*)$.
Soit alors $\mathcal{B}_1$ une base orthonormale de E_λ[4].
La concaténation $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base orthonormale de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme $(*)$.

Cas 2 : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing$.
Soit $Q = X^2 + \alpha X + \beta$ un facteur irréductible de χ_f dans $\mathbb{R}[X]$. Notons $N = \operatorname{Ker} Q(f)$.
Montrons que : $N \neq \{0\}$; effectivement, écrivons $Q = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(f)$ et $\det(f - \lambda \mathrm{Id}) = 0$, donc

$$\det Q(f) = \det(f - \lambda \mathrm{Id}) \det(f - \overline{\lambda} \mathrm{Id}) = 0,$$

donc $N \neq \{0\}$.
Comme $Q(f)$ commute avec f et f^*, alors N est stable par f et f^*.
Posons $g = f|_N$ alors $g^* = f^*|_N$ et $g^*g = (f^*f)\,|_N$ est symétrique réel.
Soient alors $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(g^*g)$ et $x \in N\backslash\{0\}$, tels que $g^*g(x) = \mu x$.
Soit $F = \mathrm{Vect}\{x, f(x)\}$; on a $\dim F = 2$ car $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) = \varnothing$.
Comme $f^2(x) = -\alpha f(x) - \beta x$, alors F est stable par f ; même : $F = \mathrm{Vect}\left\{f(x), f^2(x)\right\}$ car $\beta \neq 0$.
On a $f^*(f(x)) = \mu x \in F$ et $f^*\left(f^2(x)\right) = f\left(f^*f(x)\right) = f(\mu x) = \mu f(x) \in F$.
Donc F est stable par f^* ; ainsi, $f|_F$ est un endomorphisme normal.
Par le lemme 2, il existe $\mathcal{B}_2$ une base orthonormale de F avec

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_2}(f|_F) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ où } b \neq 0.$$

Comme F est stable par f et f^*, par le début du lemme 1, $F^\perp$ est stable par f^* et $f^{**} = f$.
Donc $f|_{F^\perp}$ est un endomorphisme normal.
Comme $F^\perp$ est de dimension $n-2$, par récurrence, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $F^\perp$, telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1}(f|_{F^\perp})$ soit de type $(*)$.
Et la concaténation $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base orthonormale de E, telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ soit de type $(*)$. ■

Références

[Gou Al] X. GOURDON – *Les maths en tête : Algèbre*, 2e éd., Ellipses, 2009.

3. En effet, $f^*|_{E_\lambda^\perp}$ existe ; par unicité de l'adjoint, on montre que : $f^*|_{E_\lambda^\perp} = \left(f|_{E_\lambda^\perp}\right)^*$, puis on a que $f|_{E_\lambda^\perp}$ et $\left(f|_{E_\lambda^\perp}\right)^*$ commutent car f et f^* commutent.
4. Ben oui : E_λ est de dimension finie donc admet une base et on l'orthonormalise par Schmidt !