Théorème des événements rares de Poisson

Leçons : ***218, 241, 249, 261, 262, 264***

[Ouv 1], théorème 7.1
[Ouv 2], théorème 14.20

Théorème (*Événements rares*)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\left\{A_{n,j} \middle| 1 \leqslant j \leqslant M_n\right\}$ d'événements indépendants.
On pose : $p_{n,j} = \mathbb{P}\left(A_{n,j}\right)$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.
On suppose [1] : $\max_{1 \leqslant j \leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$.
Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

On commence par montrer le théorème de Poisson, dont le théorème des événements rares est une généralisation.

Théorème (*Poisson*)

On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Si $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$,
Alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration du théorème de Poisson :

Comme $np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, on a : $p_n = \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, pour $n \geqslant k$:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}$$

Or $n(n-1)\dots(n-k+1)\left[\dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^k = \dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\dots\dfrac{n-k+1}{n}[\lambda + o(1)]^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^k$

Et $\left[1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{n-k} = \exp\left[(n-k)\ln\left(1 - \dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[(n-k)\left(-\dfrac{\lambda}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}$

Par conséquent, $\mathbb{P}(S_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. ■

Démonstration du théorème des événements rares :

On va utiliser le théorème de Lévy.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des $A_{n,j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant M_n$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{M_n} \varphi_{\mathbb{1}_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{M_n}\left(p_{n,j}e^{it} + 1 - p_{n,j}\right) = \prod_{j=1}^{M_n}\left(1 + p_{n,j}\left(e^{it} - 1\right)\right)$$

D'où, en posant $z = e^{it} - 1$:

$$\mathrm{Log}\left(\varphi_{S_n}(t)\right) = \sum_{j=1}^{M_n} \mathrm{Log}\left(1 + p_{n,j}z\right)$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $|z| < 1$:

$$\mathrm{Log}(1+z) = z + \int_1^{1+z} \frac{(1+z-v)^1}{1!}\frac{-1}{v^2}\,dv = z + \int_0^1 (1+z-1-zu)\frac{-1}{(1+zu)^2}z\,du = z - z^2\int_0^1 \frac{1-u}{(1+zu)^2}\,du$$

1. Attention, certaines hypothèses dans le livre de Ouvrard sont inutiles.

Comme $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant M_n} \left|p_{n,j}z\right| < \frac{1}{2}$.
Soit alors $n \geqslant N$,

$$\operatorname{Log} \varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{M_n} \left[p_{n,j}z - p_{n,j}^2 z^2 \int_0^1 \frac{1-u}{\left(1+p_{n,j}zu\right)^2}\,\mathrm{d}u \right] = z\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} - z^2 \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{\left(1+p_{n,j}zu\right)^2}\,\mathrm{d}u$$

Or, pour $u \in [0,1]$, par inégalité triangulaire : $\left|1+p_{n,j}zu\right| \geqslant 1 - p_{n,j}|z|u \geqslant 1 - p_{n,j}|z| \geqslant \frac{1}{2}$.

Donc $$\left|\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{\left(1+p_{n,j}zu\right)^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{|1-u|}{\left|1+p_{n,j}zu\right|^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 4 \int_0^1 (1-u)\,\mathrm{d}u = 2\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2$$
$$\leqslant 2\left(\max_{1\leqslant j\leqslant M_n} p_{n,j}\right)\left(\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j}\right)$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{M_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{1-u}{\left(1+p_{n,j}zu\right)^2}\,\mathrm{d}u = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Log} \varphi_{S_n}(t) = \lim\limits_{n\to\infty} z\sum\limits_{j=1}^{M_n} p_{n,j} = \lambda z$.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \exp\left(\lambda\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1\right)\right)$ d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. ■

Références

[Ouv 1] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 1*, 2e éd., Cassini, 2007.
[Ouv 2] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 2*, 3e éd., Cassini, 2009.