Intégrale de Fresnel

Leçons : 236, 239, *235*

[Gou An], exercice 5.4.5

Théorème

On a l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Démonstration :

On pose $\Phi = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$.

Pour $t, T \geqslant 0$, on pose : $f(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$, $F(t) = \displaystyle\iint_{[0,t]^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $I(T) = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}t$.

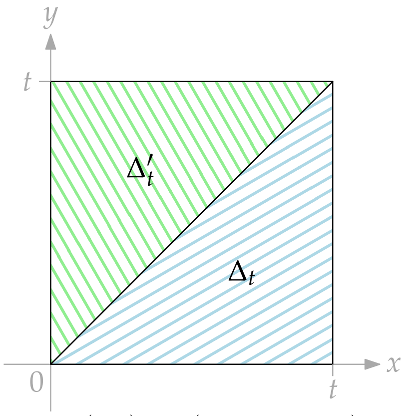
On va exprimer $F(t)$ de deux manières.

D'une part, la fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)}$ est continue sur le pavé compact $[0,t]^2$. En appliquant Fubini, on obtient : $F(t) = f(t)^2$.

D'autre part, notons :

$$\Delta_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in [0,t] \text{ et } y \in [0,x]\right\}$$

$$\Delta'_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \in [0,t] \text{ et } x \in [0,y]\right\}$$



La fonction $(x,y) \mapsto (y,x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de Δ_t sur Δ'_t.
Par changement de variable, on obtient :

$$F(t) = \iint_{\Delta_t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Delta'_t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{\Delta_t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

La forme de l'intégrande suggère alors un passage en coordonnées polaires : $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $K_t := \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \middle| \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } r \in \left[0, \frac{t}{\cos\theta}\right]\right\}$ sur Δ_t.

On obtient alors :

$$F(t) = 2\iint_{K_t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}} 2\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\exp\left(\frac{\mathrm{i}t^2}{\cos^2\theta}\right) - 1\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Puis, en injectant dans $I(T)$, on obtient :

$$I(T) = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{T}\int_0^T\int_0^{\frac{\pi}{4}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t$$

En appliquant Fubini, puis le changement de variable $u = \dfrac{t}{\cos\theta}$, on trouve :

$$I(T) = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^T\exp\left(\frac{\mathrm{i}t^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{T}{\cos\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u^2}\cos\theta\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{i}\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{T}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{T}{\cos\theta}\right)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

On souhaite désormais faire tendre T vers $+\infty$. On va montrer que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Il suffit de montrer que l'intégrale de Fresnel est convergente. Étudions $\displaystyle\int_1^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x$.

Par changement de variable $u = x^2$ et en faisant une intégration par parties :

$$\int_1^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\right]_1^{t^2} - \int_1^{t^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{\mathrm{i}}\frac{-1}{4u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{2\mathrm{i}t}}_{\xrightarrow[t\to\infty]{}0} \underbrace{-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} + \frac{1}{4\mathrm{i}}\int_1^{t^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u}_{\text{quantité bornée par convergence dominée}}$$

Donc f est bornée au voisinage de $+\infty$, donc $\lim\limits_{T\to+\infty} I(T) = \mathrm{i}\dfrac{\pi}{4}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \Phi$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \Phi^2$. Montrons que $\lim\limits_{T\to\infty} I(T) = \Phi^2$.
Soit $\varepsilon > 0$; $\exists A > 0, \forall t \geqslant A, \left|F(t) - \Phi^2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $T > A$, on a :

$$I(T) = \frac{1}{T}\int_0^A F(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_A^T F(t)\,\mathrm{d}t \text{ puis } \left|I(T) - \Phi^2\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^A \left|F(t) - \Phi^2\right|\,\mathrm{d}t}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } T \geqslant T_0} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_A^T \left|F(t) - \Phi^2\right|\,\mathrm{d}t}_{<\frac{\varepsilon}{2}\frac{T-A}{T}}$$

Donc pour $T \geqslant \max\{A, T_0\}$, $\left|I(T) - \Phi^2\right| < \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{T\to\infty} I(T) = \Phi^2$.
Par unicité de la limite : $\Phi^2 = \mathrm{i}\dfrac{\pi}{4}$, d'où $\Phi = \pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Pour déterminer le bon signe, on regarde le signe de $\mathrm{Im}\,(\Phi)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\Phi) &= \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}\right) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin u}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right)\mathrm{d}u \geqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. ■

Références

[Gou An] X. GOURDON – *Les maths en tête : Analyse*, 2e éd., Ellipses, 2008.