Inversion de la transformée de Fourier

Leçons : *234, 235, 239, 240, 261*

[Ouv2], section 12.3

Rappels :

1. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$, on définit : $\widehat{\mu} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \right.$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}^d$, si $g(y-.)$ est μ-intégrable, on définit $(g \star \mu)(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} g(y-x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Théorème

Soit μ une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$ et telle que $\widehat{\mu} \in \mathrm{L}^1(\lambda)$.
Alors $\mu \ll \lambda$ et sa densité (au sens de Radon-Nikodym) est : $h(x) = \left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^d \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t$.

Prérequis

- Pour $\sigma > 0$, $g_\sigma : x \mapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)\exp\left(-\dfrac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de probabilité.
- On a : $\forall t \in \mathbb{R}^d, \widehat{g_1}(t) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^d g_1(t)$.
- Par convergence dominée : $\forall f \in \mathcal{C}_\mathrm{b}\left(\mathbb{R}^d\right), \forall x \in \mathbb{R}^d, (f \star g_\sigma)(x) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} f(x)$.

Démonstration :

Étape 1 : On va montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^d, (g_\sigma \star \mu)(y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mu}(v) g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,v\rangle}\,\mathrm{d}v$.

Comme g_σ et μ sont bornées, on a bien : $\forall y \in \mathbb{R}^d, g_\sigma(y-.) \in \mathrm{L}^1(\mu)$.

De plus, $g_\sigma(y-x) = g_\sigma(x-y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^d \exp\left(-\dfrac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^d g_1\left(\dfrac{x-y}{\sigma}\right)$.

Par un changement de variable, on obtient ensuite :

$$g_\sigma(y-x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(z)\exp\left(\mathrm{i}\left\langle \frac{x-y}{\sigma}, z\right\rangle\right)\frac{\mathrm{d}z}{\sigma^d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v)\exp(\mathrm{i}\langle x-y, v\rangle)\,\mathrm{d}v$$

Donc $(g_\sigma \star \mu)(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v)\exp(\mathrm{i}\langle x-y, v\rangle)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}\mu(x)$.

Or $|g_1(\sigma v)\exp(\mathrm{i}\langle x-y,v\rangle)| = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \exp\left(-\dfrac{\sigma^2\|v\|2}{2}\right)$ est intégrable par rapport à $\lambda \otimes \mu$ car μ est bornée et $v \mapsto \exp\left(-\dfrac{\sigma^2\|v\|^2}{2}\right) \in \mathrm{L}^1(\lambda)$.

On applique Fubini :

$$(g_\sigma \star \mu)(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,v\rangle}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}v = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,v\rangle}\widehat{\mu}(v)\mathrm{d}v$$

Étape 2 : Montrons que $\mu \ll \lambda$.

Soit $f \in \mathcal{C}_\mathrm{K}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\sigma\to 0}(f \star g_\sigma)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

On applique le théorème de convergence dominée, car :

$$|(f \star g_\sigma)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g_\sigma(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g_\sigma(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_\infty \in \mathrm{L}^1(\mu) \text{ car } \mu \text{ est bornée.}$$

On a donc : $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} (f \star g_\sigma)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g_\sigma(x-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\mu(x)$.
On applique Fubini, car $|f(y)g_\sigma(x-y)| \leqslant |f(y)|\,\|g_\sigma\|_\infty$ est $\mu\otimes\lambda$-intégrable.
Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g_\sigma(x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y = \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} g_\sigma(y-x)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}y\\ &= \lim_{\sigma\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,(g_\sigma\star\mu)(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Mais on a :

$$|f(y)\,(g_\sigma\star\mu)(y)| = |f(y)|\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \widehat{\mu}(v)g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle y,v\rangle}\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{|f(y)|}{(2\pi)^d}\,\|\widehat{\mu}\|_1$$

qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Ainsi, par convergence dominée :

$$\forall f\in\mathcal{C}_{\mathrm{K}}\left(\mathbb{R}^d\right),\ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\lim_{\sigma\to 0}(g_\sigma\star\mu)(y)\,\mathrm{d}y$$

On a donc bien $\mu\ll\lambda$.

Étape 3 : La relation précédente nous donne : $h(x) = \lim_{\sigma\to 0}(g_\sigma\star\mu)(x)$.

Ainsi : $h(x) = \lim_{\sigma\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\mu}(v)g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}v$.

Or $\left|\widehat{\mu}(v)g_1(\sigma v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\right| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d|\widehat{\mu}(v)| \in \mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Donc $h(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\mu}(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}v$. ■

Références

[Ouv2] J.-Y. OUVRARD – *Probabilités 2*, 3e éd., Cassini, 2009.