Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube

Leçons : 161, 183 [1]**, *101, 104, 105***

[H2G2], partie XII.3

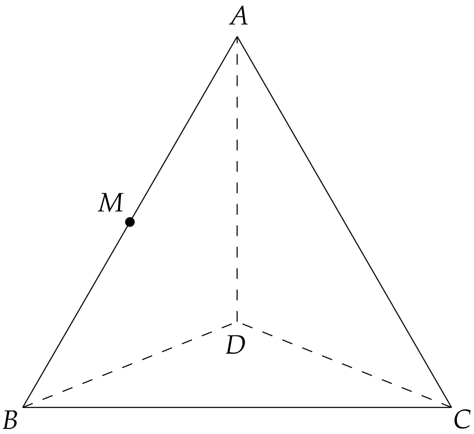
Théorème

On va montrer les résultats suivants :

1. Les groupes d'isométries du tétraèdre régulier Δ_4 sont : $\mathrm{Isom}\,(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}^+\,(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$;
2. Les groupes d'isométries du cube C_6 sont [2] : $\mathrm{Isom}^+\,(\mathrm{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}\,(\mathrm{C}_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}}$.

Démonstration :

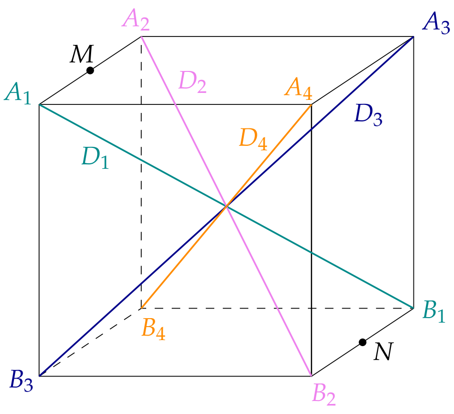
1. On fait agir $\mathrm{Isom}\,(\Delta_4)$ sur l'ensemble des sommets $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$; on obtient donc un morphisme de groupes $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}\,(\Delta_4) & \to & \mathfrak{S}(\mathcal{S}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|\mathcal{S}} \end{array} \right.$.



   → φ est injective : si $\varphi(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$, alors g stabilise $\mathcal{S}$, qui est un repère affine de $\mathbb{R}^3$, d'où $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   → φ est surjective : soit M le milieu de $[AB]$, la réflexion par rapport au plan (MCD) réalise la transposition $(A\ B)$. Similairement, toutes les transpositions sont dans $\varphi\,(\mathrm{Isom}\,(\Delta_4))$ et elles engendrent $\mathfrak{S}(\mathcal{S})$, donc $\varphi\,(\mathrm{Isom}\,(\Delta_4)) = \mathfrak{S}(\mathcal{S})$. En conséquence, φ est un isomorphisme et $\mathrm{Isom}\,(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.
   Comme $\mathrm{Isom}^+\,(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Isom}\,(\Delta_4)$, on a : $\mathrm{Isom}^+\,(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$. [3]

2. Les grandes diagonales du cube, qui relient deux sommets opposés, sont au nombre de 4. Ce sont les plus grandes distances existant entre 2 points du cube, donc les isométries du cube stabilisent l'ensemble des grandes diagonales du cube.
   Pour $i \in [\![1, 4]\!]$, on note donc D_i la diagonale (A_iB_i) et $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces grandes diagonales. On fait donc agir $\mathrm{Isom}^+\,(\mathrm{C}_6)$ sur $\mathcal{D}$, d'où le morphisme de groupes $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}^+\,(\mathrm{C}_6) & \to & \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array} \right.$.



   → φ est injective ; en effet, soit g tel que $\varphi(g) = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$.
   Alors pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $g\,(A_i) = A_i$ et $g\,(B_i) = B_i$ ou $g\,(A_i) = B_i$ et $g\,(B_i) = A_i$.
   Supposons qu'il existe $i \in [\![1, 4]\!]$ tel que g fixe A_i et B_i ; et sans perdre en généralité, disons $i = 1$.
   Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ et que $g \in \mathrm{Isom}\,(\mathrm{C}_6)$, nécessairement, $g\,(A_2) = A_2$.
   Similairement, $g\,(A_4) = A_4$ et $g\,(B_3) = B_3$.
   g fixe donc un repère affine de l'espace, d'où $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   Désormais, on suppose que $\forall i \in [\![1, 4]\!]$, $g\,(A_i) = B_i$.
   Notons O le centre du cube, alors, on a : pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $s_O g\,(A_i) = A_i$, d'où $s_O g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   Ceci contredit alors la positivité de g et ce cas n'est donc pas possible. φ est donc injective.

   → φ est surjective, car la transposition $(D_1\ D_2)$ est l'image par φ du retournement d'axe (MN), où M et N sont les milieux des segments $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$.

1. Oui, c'est de la mauvaise foi, et je vous laisse ainsi intact le bonheur de travailler sur la leçon 183.
2. Et on s'en sert dans un autre développement : la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, qu'on peut lire en page **??**.
3. Soit H d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$, alors $\forall g \in \mathfrak{S}_n, \overline{g}^2 = 1$ dans ${}^{\mathfrak{S}_n}/_H$ et donc $g^2 \in H$; autrement dit, H contient tous les carrés d'éléments de $\mathfrak{S}_n$. En particulier, H contient tous les 3-cycles qui engendrent $\mathfrak{A}_n$. Donc, pour des raisons de cardinalité $H = \mathfrak{A}_n$.

Ainsi, $\text{Isom}^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$.
O étant l'isobarycentre de C_6, on a : $\forall g \in \text{Isom}(C_6), g(O) = O$.
Par conséquent, pour tout $g \in \text{Isom}(C_6)$, on a : $gs_O = s_O g$, vu que $\mathrm{L}(s_O) = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et que g et s_O ont un point fixe commun. [4]
Ainsi, l'application $F : \left| \begin{array}{ccc} \text{Isom}(C_6) & \to & \text{Isom}^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g & \mapsto & \begin{cases} (g, 0) & \text{si } g \in \text{Isom}^+(C_6) \\ (gs_O, 1) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.
Donc $\text{Isom}(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■

Références

[H2G2] P. CALDERO et J. GERMONI – *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage & Mounet, 2013.

4. Soient f et g deux applications affines vérifiant $\mathrm{L}(f) \circ \mathrm{L}(g) = \mathrm{L}(g) \circ \mathrm{L}(f)$ et $\exists O \in \mathbb{R}^3, f(O) = O = g(O)$.
Alors $\forall M \in \mathbb{R}^3, f \circ g(M) = f \circ g(O) + \mathrm{L}(f \circ g)\left(\overrightarrow{OM}\right) = g \circ f(O) + \mathrm{L}(g \circ f)\left(\overrightarrow{OM}\right) = g \circ f(M)$.