Théorème de Kronecker et application

Leçons : 143, 144 [1], *102*

[X-ENS Al1], exercice 5.33
[Szp], théorème 10.80

Théorème

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire, et dont les racines sont de module $\leqslant 1$.
On suppose que $P(0) \neq 0$.
Alors les racines de P sont des racines de l'unité.

Démonstration :

→ On note $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ les racines de P, comptées avec leur multiplicité, où $n = \deg P \geqslant 1$.
On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires des z_i.
On a donc : $P = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n$.
Comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on en déduit que $\forall i \in [\![1, n]\!], \sigma_i \in \mathbb{Z}$.
Mais on sait que $\forall i \in [\![1, n]\!], |z_i| \leqslant 1$, et donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall p \in [\![1, n]\!], |\sigma_p| = \left| \sum_{I \in \mathcal{P}_p([\![1,n]\!])} \prod_{i \in I} z_i \right| \leqslant \sum_{I \in \mathcal{P}_p([\![1,n]\!])} 1 = \#\mathcal{P}_p([\![1, n]\!]) = \binom{p}{n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\Omega_n := \left\{ P \in \mathbb{Z}[X] \middle| P \text{ unitaire}, \deg P = n \text{ et } \mathcal{R}ac(P) \subset \overline{\mathcal{D}(0,1)} \right\}$ est fini.

→ On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = \prod_{i=1}^{n} \left(X - z_i^k \right) \in \mathbb{C}[X]$ et $Q_k = X^k - Y \in \mathbb{Z}[X, Y]$.
P_k est alors un polynôme unitaire de degré n, à racines de module $\leqslant 1$; on veut montrer que $P_k \in \Omega_n$, montrons donc que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$.
On pose $R_k(Y) = \mathrm{Res}_X \left(P(X), Q_k(X, Y) \right) \in \mathbb{Z}[Y]$.
La formule du résultant à l'aide des racines fournit :

$$R_k(Y) = 1^k \prod_{i=1}^{n} Q_k\left(z_i, Y\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(z_i^k - Y \right) = (-1)^n P_k(Y).$$

Ainsi, P_k est à coefficients entiers et donc $P_k \in \Omega_n$.

→ Or, $\Omega_n < \infty$ et $\forall P \in \Omega_n, \#\mathcal{R}ac(P) < \infty$ donc l'ensemble E des racines des éléments de Ω_n est fini.
En conséquence, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, l'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & E \\ k & \mapsto & z_i^k \end{array} \right.$ ne peut pas être injective.
Donc $\exists k \neq l \in \mathbb{N}^*, z_i^k = z_i^l$.
Comme $z_i \neq 0$, on a $z_i^{k-l} = 1$ et donc z_i est une racine de l'unité. ■

1. Dans la leçon 144, le second tiers du théorème évolue un peu.
On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = \prod_{i=1}^{n} \left(X - z_i^k \right) \in \mathbb{C}[X]$.
P_k est alors un polynôme unitaire de degré n, à racines de module $\leqslant 1$; on veut montrer que $P_k \in \Omega_n$, montrons donc que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$.
On note $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires des z_i^k.
Le coefficient de X^{n-r} dans P_k est alors $(-1)^r \Sigma_r$, qui est un polynôme symétrique en $z_1, \ldots, z_n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$; c'est donc aussi un polynôme de $\mathbb{Z}\left[\sigma_1, \ldots, \sigma_n\right]$.
Ainsi, P_k est à coefficients entiers et donc $P_k \in \Omega_n$.

Corollaire

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et irréductible, à racines de module $\leqslant 1$.
Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

Démonstration :

Supposons que $P \neq X$.
P étant irréductible, on en déduit que $P(0) \neq 0$.
On peut donc appliquer le théorème de Kronecker : les racines de P sont des racines de l'unité.
Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall z \in \mathcal{R}ac(P), z^N - 1 = 0$.
Mais P est à racines simples ; en effet, dans le cas contraire, $P \wedge P'$ serait un polynôme non-constant divisant P, ce qui contredirait l'irréductibilité de P.
Ainsi, $P \big| X^N - 1$.
Or $X^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $X^N - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.
P étant irréductible, P est un polynôme cyclotomique. ∎

Corollaire

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire, à racines de module $\leqslant 1$.
Alors P est produit d'une puissance de X et de polynômes cyclotomiques.

Références

[X-ENS Al1] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 1*, 2e éd., Cassini, 2007.
[Szp] A. SZPIRGLAS – *Algèbre pour la L3*, Pearson Éducation, 2009.