Théorème de Molien [1]

Leçons : 101, 124, 142, *104, 106, 107, 140, 151, 152, 154, 155*

Très librement inspiré de [Lei], page 95

Théorème

On note $M = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et $M_k \subset M$ le sous-espace des polynômes homogènes de degré k.
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Pour $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on définit : $\sigma_g : \left| \begin{array}{ccc} M & \to & M \\ P(\underline{X}) & \mapsto & P(\underline{X}g) \end{array} \right.$, où $\underline{X} = (X_1 \ \ldots \ X_n)$ est le vecteur-ligne des indéterminées.
Alors σ_g induit un automorphisme sur chaque M_k, on note $m_k = \dim M_k$ et $m_k(G) = \dim M_k^G$, où $M_k^G = \left\{P \in M_k \middle| \forall g \in G, \sigma_g(P) = P\right\}$.
Et on a l'égalité dans $\mathbb{C}[\![Z]\!]$: [2]

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - gZ)} = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(G) Z^k$$

Démonstration :

Étape 1 : σ_g induit un automorphisme sur chaque M_k.

Soient $g, g' \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on a : $\sigma_{gg'} = \sigma_g \sigma_{g'}$ et $\sigma_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$, donc $\sigma_g \in \mathrm{GL}(M)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on remarque que l'image par σ_g d'un monôme de degré total k est un polynôme homogène de degré k.
Par linéarité, on en déduit que $\sigma_g(M_k) \subset M_k$.
Or ${\sigma_g}_{|M_k}$ est injectif car σ_g l'est et $\dim M_k < \infty$, donc ${\sigma_g}_{|M_k} \in \mathrm{GL}(M_k)$.

Étape 2 : Montrons l'égalité de séries formelles $\dfrac{1}{\det(\mathrm{Id} - gZ)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{tr}\left({\sigma_g}_{|M_k}\right) Z^k$ pour $g \in G$.

Par le théorème de Lagrange, on a : $g^{\#G} = \mathrm{Id}$.
Or $X^{\#G} - 1$ est scindé à racines simples, donc g est diagonalisable.
Donc $\exists u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), g = udu^{-1}$, avec $d = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Ainsi, ${\sigma_g}_{|M_k}$ et ${\sigma_d}_{|M_k}$ sont semblables, d'où $\mathrm{tr}\left({\sigma_g}_{|M_k}\right) = \mathrm{tr}\left({\sigma_d}_{|M_k}\right)$.
Mais aussi :

$$\frac{1}{\det(\mathrm{Id} - gZ)} = \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - dZ)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \lambda_i Z} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} v_k Z^k$$

où on a posé $v_k = \sum\limits_{\substack{r_1, \ldots r_n \in \mathbb{N} \\ r_1 + \ldots + r_n = k}} \lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n}$.

Or :

$$ {\sigma_d}_{|M_k}\left(X_1^{r_1} \ldots X_n^{r_n}\right) = (\lambda_1 X_1)^{r_1} \ldots (\lambda_n X_n)^{r_n} = \left(\lambda_1^{r_1} \ldots \lambda_n^{r_n}\right) X_1^{r_1} \ldots X_n^{r_n}$$

1. Le jury veut que vous soyez capables d'en parler si vous présentez ce développement ! Un lien vers un document rédigé par Arnaud STOCKER pour vous donner une idée de ce à quoi ce théorème peut servir.

2. Même si je le déconseille parce qu'on n'a pas besoin d'arguments analytiques dans ce développement, quand on veut travailler avec des séries entières, on doit ajouter le lemme suivant, qui justifie que toutes les séries entières en jeu ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1 :

Lemme

Si $|z| < 1$, alors $\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} m_k z^k$.

En effet, M_k admet pour base $\left(X_1^{r_1} \ldots X_n^{r_n}\right)_{\substack{r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N} \\ r_1 + \ldots + r_n = k}}$; donc $m_k = \dim M_k = \#\left\{(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n | r_1 + \ldots + r_n = k\right\}$.

Et pour $|z| < 1$: $\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^n = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{\substack{r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N} \\ r_1 + \ldots + r_n = k}} 1\right) z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k z^k$.

Et comme $\left(X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}\right)_{\substack{r_1,\dots,r_n \in \mathbb{N} \\ r_1+\dots+r_n=k}}$ est une base de M_k, on obtient : $v_k = \operatorname{tr}\left(\sigma_{d\,|M_k}\right)$.

Donc $\dfrac{1}{\det(\mathrm{Id}-gZ)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tr}\left(\sigma_{g\,|M_k}\right) Z^k$ pour tout $g \in G$.

Étape 3 : Concluons.

Lemme

Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n < \infty$, $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes et G un groupe fini.
On note $V^G = \{v \in V | \forall g \in G, \varphi(g)(v) = v\}$.
On a alors :

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g)) = \dim V^G$$

Démonstration :
On pose $p_G = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(g)$. On a : $\forall h \in G, \varphi(h) \circ p_G = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(h) \circ \varphi(g) = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(hg) = p_G$.
Donc $\forall v \in V, \forall h \in G, \varphi(h)\left(p_G(v)\right) = p_G(v)$, donc $p_G(V) \subset V^G$.
Soit $v \in V^G$, $p_G(v) = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} v = v$ et donc $p_G(V) = V^G$.
Soit $v \in V$, $p_G\left(p_G(v)\right) = p_G(v)$, car $p_G(v) \in p_G(V) = V^G$ et donc p_G est un projecteur.
Dès lors : $\dim V^G = \operatorname{rg} p_G = \operatorname{tr} p_G = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g))$. ■

Ici, $\forall k \in \mathbb{N}, \sigma^{(k)} : \left| \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{GL}\left(M_k\right) \\ g & \mapsto & \sigma_{g\,|M_k} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes.

Par le lemme, on a : $\dim M_k^G = m_k(G) = \dfrac{1}{\#G} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr}\left(\sigma_{g\,|M_k}\right)$.

Par conséquent :

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id}-gZ)} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tr}\left(\sigma_{g\,|M_k}\right) Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}\left(\sigma_{g\,|M_k}\right) Z^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(G) Z^k$$ ■

Références

[Lei] É. LEICHTNAM – *Exercices corrigés de mathématiques Polytechnique-ENS (Tome algèbre et géométrie)*, Ellipses, 1999.