Lemme de Morse

Leçons : 158, 170, 171, 214, 215, 218

[Rou], exercice 114

Théorème

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$.
On suppose que $\mathrm{D}f(0) = 0$ et que $\mathrm{D}^2 f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$, où $u = \varphi(x)$.

Démonstration :

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$f(x) - f(0) - \mathrm{D}f(0).x = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} \mathrm{D}^2 f(tx).(x,x)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $f(x) - f(0) = {}^{\mathrm{t}}x Q(x) x$, où $Q : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{D}^2 f(tx)\,\mathrm{d}t$ est une fonction $\mathcal{C}^1$.[1]

On va avoir besoin du lemme suivant :

Lemme

Soit $A_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe V, voisinage ouvert de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$\forall A \in V, A = {}^{\mathrm{t}}\rho(A) A_0 \rho(A)$$

Démonstration :

Étape 1 : Considérons $\chi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^{\mathrm{t}}M A_0 M \end{array} \right.$; c'est une application polynomiale, donc $\mathcal{C}^1$.

Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, utilisant que A_0 est symétrique,

$$\begin{aligned} \chi(\mathrm{I}_n + H) - \chi(\mathrm{I}_n) &= {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{I}_n + H) A_0 (\mathrm{I}_n + H) - A_0 = {}^{\mathrm{t}}H A_0 + A_0 H + {}^{\mathrm{t}}H A_0 H \\ &= {}^{\mathrm{t}}(A_0 H) + A_0 H + o\left(\|H\|^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{D}\chi(\mathrm{I}_n).H = {}^{\mathrm{t}}(A_0 H) + A_0 H$ donc $H \in \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\chi(\mathrm{I}_n)) \Leftrightarrow A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Étape 2 : On aimerait appliquer le théorème d'inversion locale à χ... mais on ne peut pas.

On pose $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$.
Soit $\psi = \chi_{|F} : F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{I}_n \in F$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}\psi(\mathrm{I}_n)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{D}\chi(\mathrm{I}_n)) \cap F = \{0\}$.
Comme $\dim F = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{D}\psi(\mathrm{I}_n)$, restriction de $\mathrm{D}\chi(\mathrm{I}_n)$ à F, est bijective.
Et comme ψ est de classe $\mathcal{C}^1$, par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F tel que ψ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$.
On peut supposer $U \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, quitte à prendre $U \cap U'$ où U' est un voisinage ouvert de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; un tel U' existant par continuité de det.
Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(\mathrm{I}_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et :

$$\forall A \in V, A = {}^{\mathrm{t}}\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$$

Et il suffit alors de poser $\rho = \psi^{-1}$. ■

Ici, $Q(x)$ est toujours symétrique et $Q(0) = \dfrac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(0)$ est inversible.
Par le lemme, il existe V, voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :

$$\forall A \in V, A = {}^{\mathrm{t}}\rho(A) Q(0) \rho(A)$$

1. Si on vous demande pourquoi, dites qu'il y a une dérivation sous le signe intégrale.

Et comme Q est continue, il existe W, voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tel que :

$$\forall x \in W, Q(x) \in V \text{ et } Q(x) = {}^{\mathrm{t}}\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x))$$

On pose alors $M(x) = \rho(Q(x))$ et $y = M(x)x$, on obtient : $f(x) - f(0) = {}^{\mathrm{t}}yQ(0)y$.
Par le théorème d'inertie de Sylvester, $\exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), {}^{\mathrm{t}}AQ(0)A = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_{n-p} \end{array}\right)$, car $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$.
Alors, en posant $y = Au$, on obtient :

$$f(x) - f(0) = {}^{\mathrm{t}}yQ(0)y = {}^{\mathrm{t}}u{}^{\mathrm{t}}AQ(0)Au = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

Soit alors $\varphi : x \mapsto u = A^{-1}M(x)x$; on a bien $\varphi(0) = 0$ et φ est $\mathcal{C}^1$ sur W.
Puis, pour $h \in W$, $\varphi(h) - \varphi(0) = A^{-1}M(h)h - A^{-1}M(0)0 = A^{-1}(M(0) + o(1))h = A^{-1}M(0)h + o(\|h\|)$, donc $\mathrm{D}\varphi(0) = A^{-1}M(0)$ qui est inversible.
On applique le théorème d'inversion locale à φ, qui est donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$.[2] ■

Références

[Rou] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel*, 4e éd., Cassini, 2014.

2. Il n'est cependant pas évident qu'il soit nécessaire d'avoir M de classe $\mathcal{C}^1$ (ie f de classe $\mathcal{C}^3$) pour que φ soit de classe $\mathcal{C}^1$. Clarifions donc tout cela.
Soient $x \in W$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + h \in W$:

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) - \varphi(x) &= A^{-1}M(x+h)(x+h) - A^{-1}M(x)x \\ &= A^{-1}(M(x) + \mathrm{D}M(x).h + o(\|h\|))(x+h) - A^{-1}M(x)x \\ &= A^{-1}M(x)h + A^{-1}(\mathrm{D}M(x).h)x + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Et c'est la continuité de M et de $\mathrm{D}M$ qui rend continue l'application :

$$\mathrm{D}\varphi : x \longmapsto \Big(h \mapsto A^{-1}(M(x)h + (\mathrm{D}M(x).h)x)\Big)$$