Étude du groupe $\mathrm{O}(p,q)$

Leçons : 156, 158, *106, 170, 171*

[H2G2], partie VI.2

Notations : pour $p,q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{O}(p,q)$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$, de signature (p,q), c'est-à-dire $x_1^2 + \ldots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$, dont on note $\mathrm{I}_{p,q}$ la matrice dans la base canonique. On notera également $\mathrm{O}(p)$ le groupe $\mathrm{O}(p,\mathbb{R})$.

Théorème

Soient $p,q \in \mathbb{N}^*$.
Il existe un homéomorphisme : $\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

On commence par montrer le lemme qui suit.

Lemme

L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration du lemme :

→ Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; par théorème spectral, $S = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)P^{-1}$, où $P \in \mathrm{O}(n)$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i \in \mathbb{R}$.
Alors $\exp(S) = P\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n}\right)P^{-1} = P\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n}\right){}^{\mathrm{t}}P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Et par restriction, $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est continue.

→ Pour la surjectivité, soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,
$B = P\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)P^{-1} = \exp\underbrace{\left(P\mathrm{diag}\left(\ln\lambda_1,\ldots,\ln\lambda_n\right)P^{-1}\right)}_{\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$, où $P \in \mathrm{O}(n)$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \lambda_i > 0$.

→ L'injectivité de $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ découle de son injectivité sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. [1]

→ Reste à montrer la bicontinuité ; soit $\left(B_p\right)_p = \left(\exp A_p\right)_p$ une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B = \exp A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: montrons que $A_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} A$.
$\left(B_p\right)_p$ converge donc est bornée pour $|\!|\!|.|\!|\!|_2$, et par continuité [2] de l'inverse sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, la suite $\left(B_p^{-1}\right)_p$ converge (vers B^{-1}), et est également bornée pour $|\!|\!|.|\!|\!|_2$.
Or, $\forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|\!|\!|M|\!|\!|_2 = \sqrt{\rho\left({}^{\mathrm{t}}MM\right)} = \sqrt{\rho\left(M^2\right)} = \rho(M)$. [3]
Donc l'union des spectres des matrices B_p, $p \in \mathbb{N}$, est à la fois majorée par $C \in \mathbb{R}$ et minorée par $C' \in \mathbb{R}$ (puisque les spectres des matrices B_p^{-1} sont eux-mêmes majorés).
En conséquence, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}\left(B_p\right) \subset [C',C] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}\left(A_p\right) \subset [\ln C', \ln C]$ qui est compact.
On a ainsi démontré que la suite $\left(A_p\right)$ est bornée pour $|\!|\!|.|\!|\!|_2$.
Soit alors $\left(A_{p_k}\right)_k$ une sous-suite, dont on note $\tilde{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la limite.
Ainsi : $\exp\left(\tilde{A}\right) \underset{k\to\infty}{\longleftarrow} \exp\left(A_{p_k}\right) = B_{p_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} B = \exp(A)$.
Puis, par unicité de la limite et par injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il vient : $A = \tilde{A}$.
La suite $\left(A_p\right)_p$ est donc bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence : elle converge. [4] ■

1. D'accord c'est un peu expéditif, mais le développement est long. Je le détaille ici dans le cas de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ mais c'est pareil dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, tels que $\exp(A) = \exp(A')$; on note $\mathrm{e}^{\lambda_1},\ldots,\mathrm{e}^{\lambda_n}$ les valeurs propres de $\exp(A)$ (vu qu'elles sont dans $\mathbb{R}^{+*}$). Soit Q un polynôme interpolateur tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], Q\left(\mathrm{e}^{\lambda_i}\right) = \lambda_i$. Alors, on obtient : $A = Q(\exp A) = Q(\exp A') \in \mathbb{C}[A']$. Ainsi, A et A' commutent, et par diagonalisation simultanée $A = PDP^{-1}$ et $A' = PD'P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D, D' deux matrices diagonales. Puis $\exp(A) = \exp(A') \Leftrightarrow \exp(D) = \exp(D') \Leftrightarrow D = D' \Leftrightarrow A = A'$.
2. Cela vient de la continuité du déterminant, et de sa non-annulation sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Cela découle de la décomposition polaire.
4. Par l'absurde, soit (u_n) une suite bornée n'admettant qu'une valeur d'adhérence, notée l, et ne convergeant pas vers l. Alors $\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - l| > \varepsilon$. On peut extraire une sous-suite $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_{\sigma(n)} - l\right| > \varepsilon$. Par Bolzano-Weierstrass, $\left(u_{\sigma(n)}\right)$ étant bornée, on peut réextraire une sous-suite convergente, disons vers l'. Mais $|l' - l| \geqslant \varepsilon$, et (u_n) possède deux valeurs d'adhérence distinctes. Contradiction : (u_n) converge donc vers l.

Démonstration du théorème :

→ Désormais, $n = p + q$; soit $M \in \mathrm{O}(p, q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Par décomposition polaire, on peut écrire $M = OS$, avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Notre objectif est de montrer que O et S sont dans $\mathrm{O}(p, q)$; on note $T = {}^{\mathrm{t}}MM = S^2$.
Cependant, $M \in \mathrm{O}(p, q) \Leftrightarrow M\mathrm{I}_{p,q}{}^{\mathrm{t}}M = \mathrm{I}_{p,q} \Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}M^{-1}\mathrm{I}_{p,q}^{-1}M^{-1} = \mathrm{I}_{p,q}^{-1} \Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}M^{-1}\mathrm{I}_{p,q}M^{-1} = \mathrm{I}_{p,q}$

$$\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}M^{-1} \in \mathrm{O}(p, q) \Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}M \in \mathrm{O}(p, q).$$

Ainsi, $T \in \mathrm{O}(p, q)$. Mais $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc $\exists U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), T = \exp U$.
Mais on a : $T \in \mathrm{O}(p, q) \Leftrightarrow T\mathrm{I}_{p,q}{}^{\mathrm{t}}T = \mathrm{I}_{p,q}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}T = \mathrm{I}_{p,q}^{-1}T^{-1}\mathrm{I}_{p,q}\\
&\Leftrightarrow \exp\left({}^{\mathrm{t}}U\right) = \mathrm{I}_{p,q}\exp(-U)\mathrm{I}_{p,q}^{-1}\\
&\Leftrightarrow \exp\left({}^{\mathrm{t}}U\right) = \exp\left(-\mathrm{I}_{p,q}U\mathrm{I}_{p,q}^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \underbrace{{}^{\mathrm{t}}U}_{=U} = -\mathrm{I}_{p,q}U\mathrm{I}_{p,q}^{-1} \qquad \text{(par bijectivité de exp)}\\
&\Leftrightarrow \exp\left(\frac{{}^{\mathrm{t}}U}{2}\right) = \exp\left(-\mathrm{I}_{p,q}\frac{U}{2}\mathrm{I}_{p,q}^{-1}\right)\\
&\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\exp\left(\frac{U}{2}\right) = \mathrm{I}_{p,q}\exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1}\mathrm{I}_{p,q}^{-1}\\
&\Leftrightarrow \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathrm{O}(p, q)
\end{aligned}$$

Or $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\exp\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \exp(U) = T = S^2$. Donc $S = \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in \mathrm{O}(p, q)$. [5]
Également, $O = MS^{-1} \in \mathrm{O}(p, q)$, et comme la décomposition polaire est une bijection bicontinue, on a l'homéomorphisme :

$$\mathrm{O}(p, q) \simeq (\mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{O}(n)) \times \left(\mathrm{O}(p, q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right).$$

→ Soit $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{O}(n)$. [6]
On a alors :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & -\mathrm{I}_q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}C \\ \hline {}^{\mathrm{t}}B & {}^{\mathrm{t}}D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^{\mathrm{t}}A - B^{\mathrm{t}}B & A^{\mathrm{t}}C - B^{\mathrm{t}}D \\ \hline C^{\mathrm{t}}A - D^{\mathrm{t}}B & C^{\mathrm{t}}C - D^{\mathrm{t}}D \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I}_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} {}^{\mathrm{t}}A & {}^{\mathrm{t}}C \\ \hline {}^{\mathrm{t}}B & {}^{\mathrm{t}}D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^{\mathrm{t}}A + B^{\mathrm{t}}B & A^{\mathrm{t}}C + B^{\mathrm{t}}D \\ \hline C^{\mathrm{t}}A + D^{\mathrm{t}}B & C^{\mathrm{t}}C + D^{\mathrm{t}}D \end{array}\right)$$

Ainsi, $B^{\mathrm{t}}B = 0$, donc $\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \mathrm{tr}\left(B^{\mathrm{t}}B\right) = 0$, donc $B = 0$.
De même, $C = 0$, puis $A \in \mathrm{O}(p)$ et $D \in \mathrm{O}(q)$.
Conséquemment, $\mathrm{O}(p, q) \cap \mathrm{O}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \middle| A \in \mathrm{O}(p), D \in \mathrm{O}(q) \right\} \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$.

→ Définissons l'ensemble $L = \left\{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \middle| U\mathrm{I}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}U = 0\right\}$.
Alors $\exp : L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{O}(p, q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme :

- Si $U \in L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $U = {}^{\mathrm{t}}U = -\mathrm{I}_{p,q}U\mathrm{I}_{p,q}^{-1}$, donc $\exp(U) \in \mathrm{O}(p, q)$.
  Mais aussi, $\exp(U) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Cette application est donc bien définie.
- L'injectivité découle de celle vue dans le lemme.
- Pour la surjectivité : soit $T \in \mathrm{O}(p, q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\exists U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), T = \exp(U)$.
  Et comme $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), T \in \mathrm{O}(p, q) \Rightarrow {}^{\mathrm{t}}U = -\mathrm{I}_{p,q}U\mathrm{I}_{p,q}^{-1} \Rightarrow U \in L$.
  Et donc $\exists U \in L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), T = \exp(U)$.
- La bicontinuité découle de celle vue dans le lemme.

Mais $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a la particularité d'être un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, cherchons sa dimension !
On note $U = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on a : $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}A = A, {}^{\mathrm{t}}D = D, {}^{\mathrm{t}}B = C$.

5. C'est l'unicité de la racine carrée matricielle dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Je fais appel au bon sens de tous pour comprendre quelle est la taille de chaque bloc.

Puis $U\mathrm{I}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}U = \left(\begin{array}{c|c} 2A & 0 \\ \hline 0 & 2D \end{array}\right)$ et donc $U \in L \Leftrightarrow A = D = 0$.
Donc $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & {}^{\mathrm{t}}B \\ \hline B & 0 \end{array}\right) \middle| B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$.[7]

$\rightarrow$ En fin de compte on a bien démontré que :

$$\mathrm{O}(p,q) \simeq \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

■

Références

[H2G2] P. CALDERO et J. GERMONI – *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*, Calvage & Mounet, 2013.

7. Remarquez que ce n'est pas grave de parler d'isomorphisme ici : un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie est un homéomorphisme !