Méthode des petits pas

Leçons : 224

[Rom], partie 8.5.4

Théorème

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, et admettant un développement limité en 0 de la forme : $f(x) = x - \alpha x^{p+1} + \beta x^{2p+1} + o\left(x^{2p+1}\right)$, avec $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $p > 0$.
Sous de bonnes conditions initiales, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ vérifie :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{pn\alpha}} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2\sqrt[p]{p\alpha}} \frac{\ln n}{n\sqrt[p]{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt[p]{n}}\right), \text{ quand } \gamma := \frac{(1+p)\alpha^2}{2} - \beta \neq 0.$$

Démonstration :

Étape 1 : On peut écrire $f(x) = xg(x)$ et $x - f(x) = \alpha x^{p+1}h(x)$, avec $g(x)$ et $h(x)$ qui tendent vers 1 quand x tend vers 0.
Ainsi, $\exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta, \eta], g(x) > 0$ et $h(x) > 0$.
En particulier, $\forall x \in]0, \eta], 0 < f(x) < x \leqslant \eta$.
$]0, \eta]$ est stable par f donc si $x_0 \in]0, \eta]$, (x_n) est bien définie et à valeurs dans $]0, \eta]$.

Étape 2 : De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_{n+1} < x_n$, donc (x_n) est décroissante et minorée par 0.
Donc elle converge vers un point fixe l de f, car f est continue, avec $l \in [0, \eta]$.
De l'inégalité $f(x) < x$ valable sur $]0, \eta]$, on déduit $l = 0$.

Étape 3 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; on note $y_n = x_{n+1}^\lambda - x_n^\lambda$. Dès lors :

$$\begin{aligned} y_n &= x_n^\lambda\left(\left(1 - \alpha x_n^p + \beta x_n^{2p} + o\left(x_n^{2p}\right)\right)^\lambda - 1\right) = x_n^\lambda\left(-\lambda\alpha x_n^p + \lambda\beta x_n^{2p} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\left(\alpha x_n^p\right)^2 + o\left(x_n^{2p}\right)\right) \\ &= -\lambda\alpha x_n^{\lambda+p} + \left(\lambda\beta + \frac{\lambda(\lambda-1}{2}\alpha^2\right)x_n^{2p} + o\left(x_n^{2p}\right) \end{aligned}$$

Cette relation ne nous intéresse vraiment que pour $\lambda = -p$:

$$y_n = p\alpha + \left(-p\beta + \frac{-p(-p-1)}{2}\alpha^2\right)x_n^p + o\left(x_n^p\right) = p\alpha + p\underbrace{\left(\frac{p+1}{2}\alpha^2 - \beta\right)}_{=\gamma}x_n^p + o\left(x_n^p\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\alpha$$

(Remarquons qu'on a ici utilisé le fait que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $p > 0$.)
Par téléscopage, et par le lemme de Cesàro (qui sera démontré par la suite) :

$$\frac{1}{n}\left(x_n^{-p} - x_0^{-p}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\alpha$$

Il s'ensuit alors facilement : $\frac{1}{n}x_n^{-p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p\alpha$, d'où $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[p]{np\alpha}}$.

Étape 4 : On suppose désormais $\gamma \neq 0$; comme $y_n = p\alpha + p\gamma x_n^p(1 + o(1))$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k = np\alpha + p\gamma\sum_{k=0}^{n-1} x_k^p(1 + o(1)).$$

On note $S_n = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} y_k - np\alpha}{p\gamma}$, de sorte que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^p(1 + o(1))$.
Mais $x_n^p \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{np\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)p\alpha}$, et comme $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}$ diverge, on a :

$$S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{p\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{p\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{p\alpha}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+2}{k+1}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{p\alpha}\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{p\alpha}$$

D'où $\sum_{k=0}^{n-1} y_k = np\alpha + \frac{\gamma}{\alpha} \ln n(1+o(1))$.
Puis $x_n^{-p} = np\alpha + \frac{\gamma}{\alpha} \ln n + o(\ln n)$.
Enfin $x_n = (np\alpha)^{-\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{np\alpha}} \left(1 - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$.
Ce qui revient à conclure : $x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{pn\alpha}} - \frac{\gamma}{p^2\alpha^2 \sqrt[p]{p\alpha}} \frac{\ln n}{n\sqrt[p]{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt[p]{n}}\right)$. ■

Lemme (*Cesàro*)

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, une suite qui converge vers $l \in \mathbb{C}$.
Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = l$.

Démonstration :
Soit $\varepsilon > 0$; $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - l| < \varepsilon$.
Alors, pour $n > N$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - nl\right| \leqslant \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{N} a_k - Nl\right|}_{=:K} + \left|\sum_{k=N+1}^{n} a_k - (n-N)l\right| \leqslant K + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k - l| \leqslant K + (n-N)\varepsilon \leqslant K + n\varepsilon$$

Puis $\forall n > N, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - l\right| \leqslant \frac{K}{n} + \varepsilon$.

Or, $\exists N_1 \geqslant N, \forall n \geqslant N_1, \frac{K}{n} < \varepsilon$ et alors $\forall n > N_1, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - l\right| \leqslant 2\varepsilon$. ■

Références

[Rom] J.-E. ROMBALDI – *Éléments d'analyse réelle : CAPES et agrégation de mathématiques*, EDP Sciences, 2004.