Transformée de Fourier-Plancherel [1]

Leçons : 207, 234, 235, 240, *201, 202, 208, 241*

[Far], section IX.2
[Rud], lemme 4.16

Théorème

Soit $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t$.
Alors $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2$ et $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\| \widehat{f} \right\|_2$.

Démonstration :

Étape 1 : On définit $\widetilde{f} : x \to \overline{f(-x)}$ et $g = f \star \widetilde{f}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\widetilde{f}(x-y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)} \, \mathrm{d}y$ et $g(0) = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y = \|f\|_2^2$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\widetilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(u) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} \, \mathrm{d}u} = \overline{\widehat{f}(x)}$ et $\widehat{g} = \widehat{f \star \widetilde{f}} = \widehat{f}\widehat{\widetilde{f}} = \left|\widehat{f}\right|^2$.

Par inégalité de Young [2], comme $f, \widetilde{f} \in \mathrm{L}^1$, alors $g \in \mathrm{L}^1$ et $\|g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \left\|\widetilde{f}\right\|_1$.

Et par propriété de régularisation [3], comme $f, \widetilde{f} \in \mathrm{L}^2$, alors $g \in \mathcal{C}^0$ et $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \left\|\widetilde{f}\right\|_2$.

Étape 2 : Introduisons une partition de l'unité.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$: $\Phi_n(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n}}$; pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\Phi_n}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{n} - \mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^-} \mathrm{e}^{\frac{t}{n} - \mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-\frac{t}{n} - \mathrm{i}xt} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{n} - \mathrm{i}x} - \frac{1}{-\frac{1}{n} - \mathrm{i}x}\right) = \frac{n}{2\pi}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{i}nx} + \frac{1}{1 + \mathrm{i}nx}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1 + n^2x^2} \end{aligned}$$

Or $(\varphi_n \star g)(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) g(-y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt} \, \mathrm{d}t g(-y) \, \mathrm{d}y$.

On va utiliser Fubini car $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\Phi_n(t)| \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\right| \, \mathrm{d}t \, |g(-y)| \, \mathrm{d}y = \|\Phi_n\|_1 \|g\|_1 < +\infty$:

$$(\varphi_n \star g)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt} g(-y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t)\overline{\widehat{g}(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_n(t) \left|\widehat{f}(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t$$

Étape 3 : Montrons que $\lim_{n\to\infty} (\varphi_n \star g)(0) = g(0)$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme g est continue : $\exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} |(\varphi_n \star g)(0) - g(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) g(-y) \, \mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) g(0) \, \mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \underbrace{\int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(y) |g(-y) - g(0)| \, \mathrm{d}y}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\int_{|y|>\eta} \varphi_n(y) |g(-y) - g(0)| \, \mathrm{d}y}_{\leqslant 2\|g\|_\infty \int_{|y|>\eta} \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$

Donc pour n assez grand, $|(\varphi_n \star g)(0) - g(0)| \leqslant 2\varepsilon$.

1. On n'hésitera pas à sauter les calculs qui donnent $\varphi_n(x)$; on admettra l'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et la densité de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ dans L^2 (sauf dans la 235).
2. Inégalité de Young : Soient $p, q \in [1, +\infty]$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$. Soit r vérifiant $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$, alors $f \star g \in \mathrm{L}^r$ et $\|f \star g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
3. Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Si $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^{p'}$, alors $f \star g$ est uniformément continue et bornée et $\|f \star g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

Étape 4 : Concluons !

Par convergence monotone, puisque $0 \leqslant \Phi_n \left|\widehat{f}\right|^2 \leqslant \Phi_{n+1} \left|\widehat{f}\right|^2$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n \star g)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(t)\right|^2 \mathrm{d}t$.

D'où $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{f}\right\|_2^2$, montrant également que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2$. ∎

Théorème

La transformée de Fourier, définie sur $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, se prolonge en un isomorphisme, proportionnel à une isométrie, de L^2 sur L^2.

Démonstration :

Étape 1 : $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ est dense dans L^2.

Si $f \in \mathrm{L}^2$, alors $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ et par convergence dominée : $\|f - f_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Étape 2 : Montrons qu'on prolonge ainsi la transformée de Fourier à L^2 tout entier.

Soit (f_n) une suite de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ qui tend vers f dans L^2.

Comme $\left\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f_n - f_m\|_2$, donc $\left(\widehat{f_n}\right)$ est de Cauchy dans L^2 qui est complet donc converge ; on note $\widehat{f}$ sa limite.

Soit (g_n) une autre suite de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ qui tend vers f dans L^2.

On pose $h_{2n} = f_n$ et $h_{2n+1} = g_n$, pour $n \in \mathbb{N}$; ainsi $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} f$.

Ainsi $\left(\widehat{h_n}\right)$ est de Cauchy donc converge dans L^2, donc $\left(\widehat{f_n}\right)$ et $\left(\widehat{g_n}\right)$ ont même limite.

Cela montre donc que $\widehat{f}$ est indépendant de la suite convergeant vers f.

Et par passage à la limite dans $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f_n}\right\|_2$, il vient $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2$.

Étape 3 : Montrons que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.

Par intégrations par parties successives, on montre que :

$$\forall k, p \in \mathbb{N}, (\mathrm{i}t)^k \widehat{f}^{(p)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left((-\mathrm{i}x)^p f(x)\right) \mathrm{d}x$$

Cela fournit donc : $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ainsi, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1$, et la formule d'inversion de la transformée de Fourier fournit : $f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}(-x)}$.

Étape 4 : On en déduit que l'image de L^2 par $\widehat{\ }$ est dense et fermée dans L^2.

On a : $\underbrace{\mathcal{C}_{\mathrm{C}}^{\infty}(\mathbb{R})}_{\text{dense dans } \mathrm{L}^2(\mathbb{R})} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\,(\widehat{\ }) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{Im}\,(\widehat{\ })$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Soit $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, comme $\mathrm{Im}\,(\widehat{\ })$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $\exists\,(f_n) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \widehat{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} g$.

Donc $\left(\widehat{f_n}\right)$ est de Cauchy, alors (f_n) est de Cauchy dans L^2 donc converge vers $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Par continuité de $\widehat{\ }$: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} f$ donc $\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} \widehat{f}$ d'où $g = \widehat{f}$.

Donc $\mathrm{Im}\,(\widehat{\ }) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

∎

Références

[Far] J. FARAUT – *Calcul intégral*, EDP Sciences, 2006.

[Rud] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, 3e éd., Dunod, 2009.