Densité des polynômes orthogonaux [1]

Leçons : 209, 213, 239, 245, *201, 202, 207, 240, 244*

[OA], exercice 3.7

Rappels :

1. Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, on appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.
2. On note $\mathrm{L}^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions (où on a identifié celles qui sont égales presque partout), de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue ; il est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\rho = \displaystyle\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$. C'est un espace de Hilbert, qui contient les polynômes.
3. Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, et vérifiant $\deg P_n = n$. On l'appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème

Soient I un intervalle [2] de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids.
On suppose : $\exists a > 0$, $\displaystyle\int_I \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. [3]
Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, \rho)$.

Démonstration :

Étape 1 : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée ; il suffit de montrer qu'elle est totale.

On va montrer que $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(I, \rho)$, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^\perp = \{0\}$.
Par construction, on a : $\mathrm{Vect}\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{Vect}\left((X^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$.

1. À quoi servent les polynômes orthogonaux ? Ils apparaissent en intégration numérique (révisez la méthode de Gauss) et pour la diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts dans une base hilbertienne.

2. Si I est compact, l'hypothèse sur ρ est inutile et le théorème est trivialisé par le théorème de Weierstrass.

3. Regardons un contre-exemple (à connaître, mais mieux vaut prendre le temps de bien faire le développement et se garder le contre-exemple sous le coude pour les questions).
Prenons $I = \mathbb{R}^{+*}$ et $w(x) = x^{-\ln x}$ une fonction poids sur $\mathbb{R}^{+*}$; en fait, w ne vérifie pas l'hypothèse d'écrasement, et on va voir que les polynômes orthogonaux pour w ne constitue pas une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(I, w)$.
On pose $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2\pi \ln x) \end{array}\right.$, et on fixe $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{+*}} x^n \sin(2\pi \ln x) x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ny} \sin(2\pi y)\,(\mathrm{e}^y)^{-y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \quad \text{(on a posé } y = \ln x \text{ et } \mathrm{d}x = \mathrm{e}^y \mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(n+1)y - y^2} \sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y \quad \text{(on utilise } (n+1)y - y^2 = \frac{(n+1)^2}{4} - \left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2 \text{ pour la ligne suivante)} \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) \sin(2\pi y)\,\mathrm{d}y \\
&= \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t + (n+1)\pi)\,\mathrm{d}t \quad \text{(on a posé } t = y - \frac{n+1}{2} \text{ et } \mathrm{d}t = \mathrm{d}y) \\
&= (-1)^{n+1} \exp\left(\frac{(n+1)^2}{4}\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 \quad \text{(intégrale d'une fonction impaire intégrable)}
\end{aligned}$$

Ainsi, f est dans l'orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les polynômes orthogonaux pour w, sans pour autant être nulle dans $\mathrm{L}^2(I, w)$.

On va donc montrer que $\forall f \in \mathrm{L}^2(I,\rho)$, $[\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0] \Rightarrow [f = 0]$.
Dans la suite, on fixe $f \in \mathrm{L}^2(I,\rho)$ et vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$.

Étape 2 : On pose $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I$; montrons que $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
Rappelons que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t \leqslant \dfrac{1+t^2}{2}$. Ainsi, $\forall x \in I, |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{1+|f(x)|^2}{2}\rho(x)$.
Mais ρ est intégrable sur I (car c'est une fonction poids) et $\rho|f|^2$ aussi (car $f \in \mathrm{L}^2(I,\rho)$).
En conséquence, $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Étape 3 : On peut donc considérer sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ définie par : $\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{\varphi}(\omega) = \displaystyle\int_I f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\rho(x)\,\mathrm{d}x$.
On va montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur la bande $B_a = \left\{z \in \mathbb{C} \middle| |\mathrm{Im}\, z| < \dfrac{a}{2}\right\}$.
On pose, pour $z \in B_a$, $g(z,x) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx}f(x)\rho(x)$.
Déjà, pour tout $z \in B_a$, on a :

$$\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x = \int_I \mathrm{e}^{\mathrm{Im}\, z.x}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{Cauchy-}\\ \text{Schwarz}}}{\leqslant} \sqrt{\int_I \mathrm{e}^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x}\sqrt{\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x} < \infty$$

La fonction $F : \left|\begin{array}{ccc} B_a & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_I g(z,x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$ est donc bien définie.
On va utiliser le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
- $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphie.
- $\forall z \in B_a$, $|g(z,x)| \leqslant \mathrm{e}^{\frac{a|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$ qui est une fonction de x, indépendante de z et qui n'a pas oublié d'être intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est holomorphe sur B_a et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\varphi}$.

Étape 4 : Le théorème précédent nous permet également de calculer les dérivées de F :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_I x^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{i})^n \langle f, g_n\rangle_\rho = 0$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, il existe un voisinage de 0 sur lequel $F \equiv 0$.
Par le théorème de prolongement analytique, on en déduit que $F \equiv 0$ sur B_a.
Conséquemment, $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}} \equiv 0$.
Comme φ est intégrable, on peut invoquer l'injectivité de la transformée de Fourier pour obtenir la nullité presque partout de φ sur $\mathbb{R}$.
Par stricte positivité de ρ, on en déduit que f est nulle presque partout sur I, autrement dit, $f = 0$ dans $\mathrm{L}^2(I,\rho)$.
Ce qui prouve le théorème. ∎

Références

[OA] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ – *Objectif Agrégation*, 2e éd., H&K, 2005.