Théorème de Riesz-Fischer

Leçons : 201, 205, 208, 234

[Bré], théorème IV.8
[Rud], théorème 3.11

Théorème

Soit X un espace mesuré, muni d'une mesure positive μ.
Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\mathrm{L}^p(\mu)$ est un espace de Banach. [1]

Démonstration :

Étape 1 : Montrons que $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ est complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$.

Donc il existe une famille $(E_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'ensembles μ-négligeables, vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \forall x \in X \backslash E_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

On définit $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$; et comme l'union est dénombrable : $\mu(E) = 0$.

Et donc, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, \forall x \in X \backslash E, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \tag{1}$$

Puis $\forall x \in X \backslash E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k}$,
autrement dit : $\forall x \in X \backslash E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Et comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge ; on note $f(x)$ sa limite.
On va montrer que la fonction f ainsi définie μ-presque partout est bien dans $\mathrm{L}^\infty(\mu)$ et que c'est bien la limite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en norme $\|.\|_\infty$.
Par passage à la limite dans (1), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, \forall x \in X \backslash E, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

Ainsi, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \|f\|_\infty \leqslant 1 + \|f_{N_1}\|_\infty < \infty$, donc $f \in \mathrm{L}^\infty(\mu)$.
Enfin, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k, \|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$.
Donc : $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Étape 2 : Pour $p \in [1, +\infty[$, $\mathrm{L}^p(\mu)$ est également complet.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^p(\mu)$.
On va en fait montrer qu'une sous-suite converge dans $\mathrm{L}^p(\mu)$; en effet, prenons $\varepsilon > 0$.
Si d'une part : $\exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K_0, \left\|f_{n_k} - f\right\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
et d'autre part : $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N_0, \|f_n - f_m\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,
Alors finalement, en posant $N = \max\left\{n_{K_0}, N_0\right\}$ on obtient : $\forall n \geqslant N, \|f - f_n\|_p \leqslant \varepsilon$, et le théorème est prouvé.
Soit donc $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant n_k, \|f_n - f_m\|_p \leqslant \frac{1}{2^k}$$

1. Une application de la complétude des espaces L^p est le prolongement de la transformée de Fourier à L^2, qui utilise le fait que toute suite de Cauchy dans L^2 converge dans L^2 (voir le développement consacré en page **??**).

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.

Notons désormais $\hat{f}_k$ pour f_{n_k}, ainsi $\forall k \in \mathbb{N}, \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leqslant \dfrac{1}{2^k}$.

Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$: $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right|$, on a donc :

$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left\|\hat{f}_{k+1} - \hat{f}_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 2$$

Par convergence monotone, g_n converge ponctuellement sur $X \backslash E$, où E est un ensemble μ-négligeable, vers une fonction g définie presque partout.
Les fonctions g_n étant à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a :

$$\|g\|_p^p = \int_X |g(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_X \liminf_{n\to\infty} |g_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |g_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant 2^p.$$

Donc $g \in \mathrm{L}^p(\mu)$.[2]
Soit $x \in X \backslash E$:

$$\forall m \geqslant n \geqslant 1, \left|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)\right| \leqslant \left|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_{m-1}(x)\right| + \ldots + \left|\hat{f}_{n+1}(x) - \hat{f}_n(x)\right| = g_{m-1}(x) - g_{n-1}(x)$$

Donc $\forall x \in X \backslash E, \left(\hat{f}_n(x)\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc elle converge ; on note $\hat{f}(x)$ sa limite.
De plus, $\forall m \geqslant n \geqslant 1, \forall x \in X \backslash E, \left|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)\right| \leqslant g_{m-1}(x)$.
Par passage à la limite : $\forall n \geqslant 1, \forall x \in X \backslash E, \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)\right| \leqslant g(x)$.
En particulier, $\left\|\hat{f}\right\|_p \leqslant \|g\|_p + \left\|\hat{f}_1\right\|_p < \infty$, donc $\hat{f} \in \mathrm{L}^p(\mu)$.
Or $\forall x \in X \backslash E, \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)\right|^p \leqslant (g(x) - g_{n-1}(x))^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)\right|^p \leqslant g(x)^p$ avec $g \in \mathrm{L}^p(\mu)$.
Donc, par convergence dominée, il vient :

$$\left\|\hat{f} - \hat{f}_n\right\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

Références

[Bré] H. BRÉZIS – *Analyse fonctionnelle*, 2e éd., Dunod, 2005.
[Rud] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, 3e éd., Dunod, 2009.

2. C'est pour montrer que $g \in \mathrm{L}^p(\mu)$ qu'on a besoin d'utiliser [Rud].