Formule sommatoire de Poisson

Leçons : 240, 246, 254, 255, *228, 235, 241* [1]

[Gou An], problème 4.4 et exercice 3.4
[Wil], exemple 7.29.f)

Théorème

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx},$$

où on a noté $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\,\mathrm{d}t$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration :

1. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en particulier, $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Ainsi, $\exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$.
   D'où $\forall K > 0, \forall x \in [-K,K], \forall n \in \mathbb{Z}, |n| > K+1 \Rightarrow |f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2}$.
   Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(.+n)$ converge normalement sur tout compact. [2]
   On note F sa limite simple.
   De façon similaire, on montre que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(.+n)$ converge normalement sur tout compact, donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
   On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions (on rappelle que f est $\mathcal{C}^1$) : F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en fait le théorème dit d'abord "sur tout segment de $\mathbb{R}$") et $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$.

2. Par ailleurs, soit $x \in \mathbb{R}$: $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n)$.
   Donc en faisant tendre N vers l'infini, on obtient $F(x+1) = F(x)$; F est donc 1-périodique.
   On va calculer ses coefficients de Fourier, pour $N \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_N(F) &= \int_0^1 F(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\,\mathrm{d}t \underset{\text{(cvu)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nn}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{3}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi Nt}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(N) \end{aligned}$$

   Comme F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa série de Fourier converge normalement vers F sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}.$$ [4]

■

1. Dans les leçons sur les distributions, on fait le corollaire 1, dans les autres, on fait le corollaire 2.
2. Car à partir de $|n| > K+1$, on a : $\left\| f(.+n)_{|[-K,K]} \right\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
3. L'intégrale converge car $f(t) = \mathcal{O}_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
4. Rappelons que la période de F vaut 1.

Corollaire (*Une distribution invariante par transformation de Fourier*)

On note $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$.
Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a : $\delta_{\mathbb{Z}} = \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k}$.

Démonstration :

1. Montrons que $\delta_{\mathbb{Z}}$ définit bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   D'après ce qu'on vient de faire : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ est bien défini.
   Reste à montrer que $\delta_{\mathbb{Z}}$ est une distribution tempérée.
   On rappelle que $\|.\|_{n,p} : \varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^n \varphi^{(p)}(x)\right|$, où $n, p \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes qui définissent la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   $$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), |\langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(k)| = |\varphi(0)| + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{k^2}\left|k^2\varphi(k)\right| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{0,0} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{k^2}\|\varphi\|_{2,0} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\left(\|\varphi\|_{0,0} + \|\varphi\|_{2,0}\right)\end{aligned}$$
   Ainsi, $\delta_{\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. On peut donc calculer sa transformée de Fourier, en utilisant la transformée de Fourier en 0 :
   $$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle \widehat{\delta_{\mathbb{Z}}}, \varphi\rangle = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \widehat{\varphi}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \varphi\rangle.$$
   Donc $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}}$.
   D'autre part, on a, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:
   $$\langle \widehat{\delta_n}, \varphi\rangle = \langle \delta_n, \widehat{\varphi}\rangle = \widehat{\varphi(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}\,\mathrm{d}x = \langle \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx}, \varphi\rangle.$$
   Ainsi, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\widehat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi kx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx}$. ■

Corollaire (*Une égalité entre deux sommes*)

$\forall s > 0, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{s}}$.

Démonstration :

Soit $\alpha > 0$, on va appliquer la formule sommatoire de Poisson à $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$, où on a posé $u = \sqrt{\alpha}t$ et $\forall x \in \mathbb{R}, I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u$.
On va chercher une équation différentielle vérifiée par I ;

→ I est dérivable, en effet : posons $h : (x, u) \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$.
  - $\forall x \in \mathbb{R}, h(x, .)$ est $\mathcal{C}^1$ et intégrable (par comparaison avec l'intégrale de Gauss) ;
  - $\forall x, u \in \mathbb{R}, \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) = -2\mathrm{i}\pi\frac{u}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}$;
  - $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall x, u \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant \frac{2\pi u}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-u^2}$, fonction majorante à la fois intégrable et indépendante de x.

  On en déduit en plus que $I'(x) = \frac{-2\mathrm{i}\pi}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}\,\mathrm{d}u$.

$\rightarrow$ Par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[\mathrm{e}^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2\mathrm{i}\pi x} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -2u\mathrm{e}^{-u^2} \frac{-\sqrt{\alpha}}{2\mathrm{i}\pi x} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \,\mathrm{d}u \\ &= 0 - \frac{\sqrt{\alpha}}{\mathrm{i}\pi x} \int_{-\infty}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x \frac{u}{\sqrt{\alpha}}} \,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha}}{\mathrm{i}\pi x} \frac{\sqrt{\alpha}}{-2\mathrm{i}\pi} I'(x) = -\frac{\alpha}{2\pi^2 x} I'(x) \end{aligned}$$

Donc $I(x) = I(0) \exp\left(-\dfrac{\pi^2 x^2}{\alpha}\right) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\dfrac{\pi^2 x^2}{\alpha}\right)$.

Ainsi, $\widehat{f}(n) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\dfrac{\pi^2 n^2}{\alpha}\right)$.

On applique la formule de Poisson en 0 : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\alpha n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$.

On pose enfin $s = \dfrac{\pi}{\alpha}$, et alors : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi}{s}} = \sqrt{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s}$. ■

Références

[Gou An] X. GOURDON – *Les maths en tête : Analyse*, 2e éd., Ellipses, 2008.

[Wil] M. WILLEM – *Analyse harmonique réelle*, Hermann, 1997.