Théorème de Stampacchia [1]

Leçons : 213, 219, *205, 206, 208*

[Bré], partie V.3

Théorème

Soit H un espace de Hilbert, et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue coercive, c'est-à-dire :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall u, v \in H, |a(u,v)| \leqslant C\|u\|\|v\| \text{ et } \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall u \in H, a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2.$$

Soit K un convexe fermé non-vide de H.
Alors $\forall \varphi \in H', \exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u)$.
De plus, si a est symétrique, alors u se caractérise par : $\begin{cases} u \in K \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in K} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$.

1. Ce qui suit provient directement de la page d'Adrien FONTAINE.

Corollaire (*Lax-Milgram*)

Soit a une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors : $\forall \varphi \in H', \exists! u \in H, \forall v \in H, a(u,v) = \varphi(v)$.
De plus, si a est symétrique, alors u se caractérise par : $\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min\limits_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right\} \end{cases}$.

Le théorème de Lax-Milgram est un outil fondamental dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles (souvent utilisé dans sa version symétrique). Le théorème de Stampacchia généralise le théorème de Lax-Milgram. Il peut aussi s'obtenir directement à partir de la théorie hilbertienne. Donnons-en maintenant quelques applications.

Soit $I =]0,1[$. On définit l'espace de Sobolev : $\mathrm{H}^1(I) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(I) \middle| \exists g \in \mathrm{L}^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \right\}$ et $\mathrm{H}_0^1(I) = \left\{ u \in \mathrm{L}^2(I) \middle| u(0) = u(1) = 0 \text{ et } \exists g \in \mathrm{L}^2(I), \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I), \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \right\}$.

Désormais, on veut résoudre le problème (où f est une fonction donnée, par exemple dans $\mathcal{C}\left(\overline{I}\right)$ ou dans $\mathrm{L}^2(I)$) :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La condition aux limites $u(0) = u(1) = 0$ s'appelle condition de Dirichlet homogène.

Une solution classique de (1) est une fonction $u \in \mathcal{C}^2\left(\overline{I}\right)$ vérifiant (1) au sens usuel. Une solution faible de (1) est une fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ qui vérifie

$$\forall \varphi \in \mathrm{H}_0^1(I), \int_0^1 u'\varphi' + \int_0^1 u\varphi = \int_0^1 f\varphi \tag{2}$$

On remarque que toute solution classique est une solution faible (intégration par parties). Pour établir l'existence de solution au problème (1), on montre l'existence d'une solution au sens faible, puis on montre que cette solution faible est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'une solution faible de classe $\mathcal{C}^2$ est une solution classique. Pour montrer l'existence d'une solution faible, on utilise le théorème de Lax-Milgram.

En effet, dans le cas où $f \in \mathcal{C}\left(\overline{I}\right)$, on applique Lax-Milgram dans $H = \mathrm{H}_0^1(I)$, avec la forme bilinéaire $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ et la forme linéaire $\varphi(v) = \int_I fv$, et on montre qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{I}\right)$ de (2).

Un problème se pose lorsque les conditions de Dirichlet ne sont plus homogènes :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } I \\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta \end{cases} \tag{3}$$

En effet, on ne peut plus se placer dans $\mathrm{H}_0^1(I)$. C'est ici qu'on va devoir utiliser le théorème de Stampacchia, qui est plus général que celui de Lax-Milgram.

On prend $f \in \mathrm{L}^2(I)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dans l'espace $\mathrm{H}^1(I)$, on introduit le convexe fermé $K = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(I) \middle| v(0) = \alpha \text{ et } v(1) = \beta \right\}$. Si u est une solution classique de (3), on a : $\forall v \in K, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u)$. Donc, on a, en particulier :

$$\forall v \in K, \int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geqslant \int_I f(v-u) \tag{4}$$

On utilise alors le théorème de Stampacchia : il existe $u \in K$ unique solution de (4).

Démonstration :

Étape 1 : Laissons de côté l'éventuelle symétrie de a pour commencer.
Soit $\varphi \in H'$; par le théorème de Riesz : $\exists! f \in H, \forall v \in H, \varphi(v) = \langle f, v \rangle$.
D'autre part, à $u \in H$ fixé, $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, donc aussi par Riesz : $\exists! A(u) \in H, \forall v \in H, a(u,v) = \langle A(u), v \rangle$.
La bilinéarité de a entraîne que $A \in \mathcal{L}(H,H)$ et on notera désormais Au pour $A(u)$, saluant ainsi cette formidable nouvelle.
De plus, $\forall u \in H, \|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leqslant C\|u\|\|Au\|$ donc $\|Au\| \leqslant C\|u\|$.[2]
Aussi, $\forall u \in H, \langle Au, u \rangle = a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2$.
Revenons à ce qu'on veut montrer. Il s'agit de voir que : $\exists! u \in K, \forall v \in K, \langle Au, v-u \rangle \geqslant \langle f, v-u \rangle$.
Soit alors $\rho > 0$, on ajoutera une contrainte sur ρ par la suite.
Ce qu'on veut montrer équivaut à : $\exists! u \in K, \forall v \in K, \langle \rho f - \rho Au + u - u, v-u \rangle \leqslant 0$, ou encore à $\exists! u \in K, \forall v \in K, u = p_K(\rho f - \rho Au + u)$, où p_K désigne la projection sur le convexe fermé K.
On va montrer que pour ρ convenablement choisi, $S : v \mapsto p_K(\rho f - \rho Av + v)$ est une application contractante de K dans K.
p_K étant 1-lipschitzienne, on a : $\forall v_1, v_2 \in K$,

$$\begin{aligned}
\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &\leqslant \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|^2 \\
&= \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\langle v_1 - v_2, Av_1 - Av_2 \rangle + \rho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 \\
&\leqslant \|v_1 - v_2\|^2 \left(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2\right)
\end{aligned}$$

On fixe donc $\rho > 0$ tel que $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$, c'est-à-dire $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{C^2}$.
Alors S est contractante, et comme K est complet (car fermé dans un Hilbert) ; S admet un unique point fixe u, qui est la solution du problème.

Étape 2 : Supposons désormais que a soit symétrique, et profitons-en pour aller un peu plus loin.
a définit alors un nouveau produit scalaire sur H (comme a est coercive, elle est définie positive), et la norme associée $u \mapsto \sqrt{a(u,u)}$ est équivalente à la norme $\|.\|$ (la continuité et la coercivité donnent chacune une inégalité).
En conséquence, H, muni du produit scalaire a, demeure un espace de Hilbert.
Ainsi, par le théorème de Riesz : $\exists! g \in H, \forall v \in H, \varphi(v) = a(g,v)$.
On a ainsi :

$$\begin{aligned}
u \in K \text{ et } \forall v \in K, a(u, v-u) \geqslant \varphi(v-u) &\Leftrightarrow u \in K \text{ et } \forall v \in K, a(g-u, v-u) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow u = p_K(g) \text{ au sens du produit scalaire } a \\
&\Leftrightarrow u \in K \text{ et } a(g-u, g-u) = \min_{v \in K} \{a(g-v, g-v)\}
\end{aligned}$$

Mais $a(g-v, g-v) = a(g,g) - 2a(g,v) + a(v,v)$, et donc minimiser $a(g-v,g-v)$ revient à minimiser $\dfrac{1}{2}a(v,v) - a(g,v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$.
D'où la caractérisation annoncée. ■

Références

[Bré] H. BRÉZIS – *Analyse fonctionnelle*, 2e éd., Dunod, 2005.

2. Pour être précis, on suppose d'abord que $Au \neq 0$, on peut alors diviser par $\|Au\|$. Évidemment, l'inégalité obtenue tient toujours quand $Au = 0$.