Ellipse de Steiner

Leçons : 180, 181, 182

[CAPES11], d'après le sujet 4
[Dbm1], proposition 5.II.5

Théorème

Soient $M_1\,(r_1)$, $M_2\,(r_2)$ et $M_3\,(r_3)$ trois points distincts non-alignés du plan affine $\mathcal{P}$.
On note $P = (X - r_1)\,(X - r_2)\,(X - r_3)$ et ω, ω' les zéros de P'.
Alors les points $F(\omega)$ et $F'(\omega')$ sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$, en leurs milieux (qu'on notera A, B et C).

Démonstration :

On va d'abord énoncer et montrer deux lemmes.

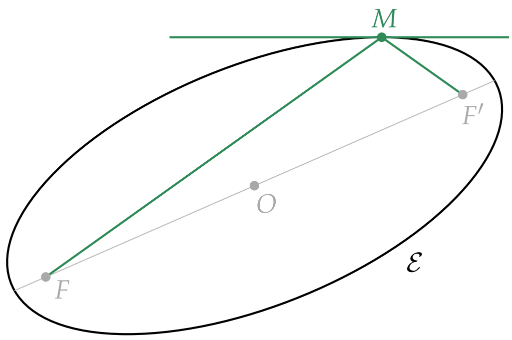
Lemme 1

Soient $\mathcal{E}$ une ellipse non-plate et $M \in \mathcal{E}$.
On note F et F' les foyers de $\mathcal{E}$.
Alors la tangente à $\mathcal{E}$ en M est la bissectrice extérieure de $\widehat{FMF'}$.

Démonstration du lemme 1 :

Si O est le centre de l'ellipse, on a la paramétrisation $\overrightarrow{OM(t)} = a\cos t\,\overrightarrow{e_1} + b\sin t\,\overrightarrow{e_2}$ quand $M(t)$ parcourt $\mathcal{E}$.
On dérive l'expression $\left\|\overrightarrow{M(t)F}\right\| + \left\|\overrightarrow{M(t)F'}\right\| = 2a$ et on obtient :

$$\left\langle \frac{\overrightarrow{M(t)F}}{\left\|\overrightarrow{M(t)F}\right\|}, \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle + \left\langle \frac{\overrightarrow{M(t)F'}}{\left\|\overrightarrow{M(t)F'}\right\|}, \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0.$$



Ceci se raccourcit en : $\left\langle \frac{\overrightarrow{M(t)F}}{\left\|\overrightarrow{M(t)F}\right\|} + \frac{\overrightarrow{M(t)F'}}{\left\|\overrightarrow{M(t)F'}\right\|}, \frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0$. Mais le premier membre du produit scalaire est le vecteur directeur de la bissectrice intérieure de $\widehat{FMF'}$!
En conséquence : la bissectrice $\left|\begin{array}{l}\text{intérieure}\\ \text{extérieure}\end{array}\right.$ est la $\left|\begin{array}{l}\text{normale}\\ \text{tangente}\end{array}\right.$ à $\mathcal{E}$ en M. ■

Lemme 2 (*Poncelet*[1])

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse non-plate de foyers F et F'.
Soit P un point extérieur à $\mathcal{E}$, par lequel passent deux tangentes à $\mathcal{E}$, aux points notés T_1 et T_2.
Alors on a : $\left(\overrightarrow{PT_1}, \overrightarrow{PF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{PT_2}\right)\ [\pi]$.

Démonstration du lemme 2 :

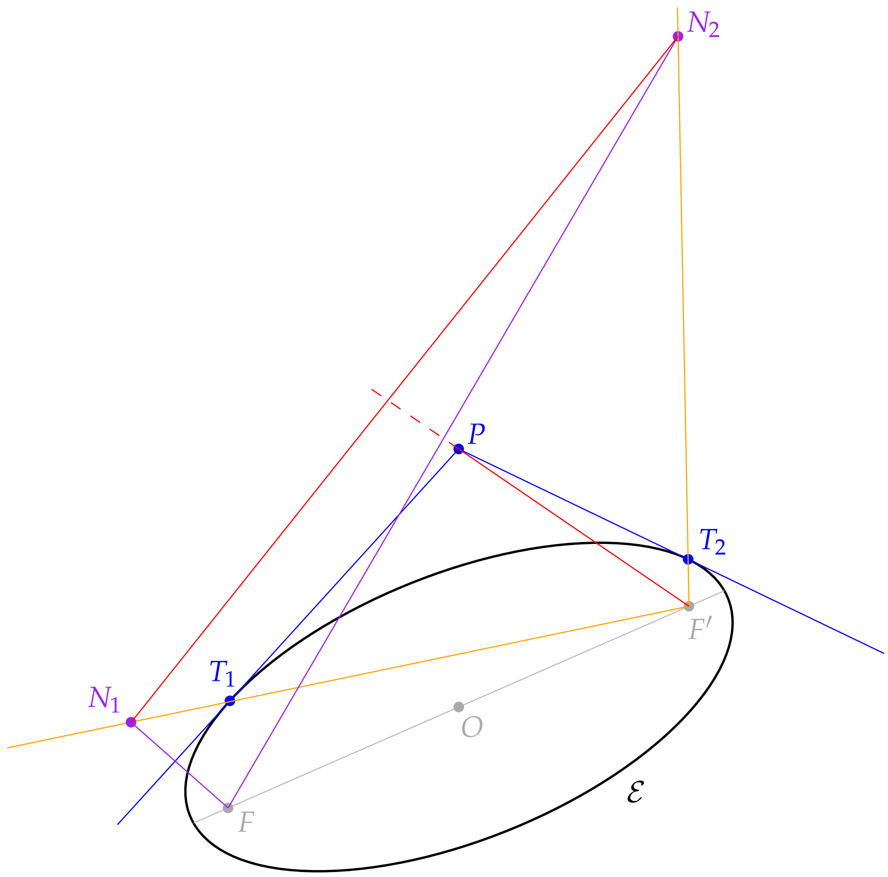
Si Δ désigne une droite de $\mathcal{P}$, on note σ_Δ la symétrie axiale d'axe Δ.
Ainsi, $\sigma_{(PF)} \circ \sigma_{(PT_1)}$ et $\sigma_{(PT_2)} \circ \sigma_{(PF')}$ sont des rotations de centre de P ; notre but va être de montrer qu'elles sont égales.
On désigne par N_1 et N_2 les symétriques de F par les symétries axiales d'axes (PT_1) et (PT_2).
D'une part, $\sigma_{(PF)} \circ \sigma_{(PT_1)}\,(N_1) = \sigma_{(PF)}(F) = F$.
D'autre part, comme (PT_1) est tangente à l'ellipse en T_1, c'est la bissectrice extérieure de $\widehat{FT_1F'}$, donc F', T_1 et N_1 sont alignés dans cet ordre.
De même, comme (PT_2) est tangente à l'ellipse en T_2, c'est la bissectrice extérieure de $\widehat{FT_2F'}$, donc F', T_2 et N_2 sont alignés dans cet ordre.

1. On trouvera une référence pour la démonstration de ce lemme avec ce document de Florian BOUGUET.

Ainsi, $F'N_1 = F'T_1 + T_1N_1 = F'T_1 + FT_1 = 2a = F'T_2 + FT_2 = F'T_2 + T_2N_2 = F'N_2$.
Aussi, on a : $PN_1 = PF = PN_2$, donc (PF') est la médiatrice de $[N_1N_2]$.
Ainsi, $\sigma_{(PT_2)} \circ \sigma_{(PF')}(N_1) = \sigma_{(PT_2)}(N_2) = F$.
En conséquence, $\sigma_{(PF)} \circ \sigma_{(PT_1)} = \sigma_{(PT_2)} \circ \sigma_{(PF')}$, puis, en regardant les angles de ces rotations :

$$\left(\overrightarrow{PT_1}, \overrightarrow{PF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{PF'}, \overrightarrow{PT_2}\right)\ [\pi].$$

■



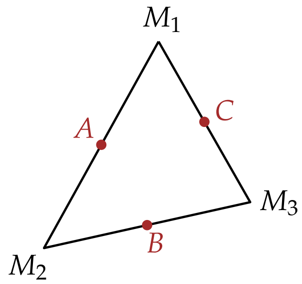
Démontrons désormais le théorème.

1. On va commencer par vouloir traiter le cas où F et F' sont confondus.
   On a : $P' = 3X^2 - 2(r_1 + r_2 + r_3)X + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$.
   Ainsi, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
P' \text{ a une racine double} &\Leftrightarrow (r_1+r_2+r_3)^2 - 3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{r_1-r_2}{r_3-r_2} = \frac{r_2-r_3}{r_1-r_3} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1M_2.M_1M_3 = (M_2M_3)^2 \\ \left(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_2M_1}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}\right)\ [2\pi] \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M_1M_2.M_1M_3 = (M_2M_3)^2 \\ M_1M_2 = M_1M_3 \text{ (isocélisme en } M_1) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 \\
&\Leftrightarrow M_1M_2M_3 \text{ est équilatéral}
\end{aligned}$$

   Mais le cas du triangle équilatéral est trivial : le cercle inscrit répond à notre problème (il est tangent aux 3 côtés en leurs milieux car les médianes se confondent avec les bissectrices).

2. Désormais, on suppose que $M_1M_2M_3$ n'est pas équilatéral, en conséquence, $F \neq F'$.
   On va montrer que $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{P} | MF + MF' = AF + AF'\}$ répond à notre problème.



→ On a bien $A \in \mathcal{E}$, mais $\mathcal{E}$ est-elle une vraie ellipse, c'est-à-dire non-plate ?
Pour cela, il suffit de montrer que $A \notin [FF']$.
Par l'absurde, on suppose que $A \in [FF']$.
Alors A est barycentre à coefficients positifs de F et F'.
Mais, par le théorème de Lucas, F et F' sont barycentres à coefficients positifs de M_1, M_2 et M_3 (car P et P' n'ont pas de racine commune).
Par associativité du barycentre, A est dans l'intérieur strict de $M_1M_2M_3$. Contradiction !

→ On va montrer que (M_1M_2) est tangente à $\mathcal{E}$.
On note a l'affixe de A, et on calcule $P'(a) = 3(a-\omega)(a-\omega') = (a-r_1)\,(a-r_2) + (a-r_3)\,\underbrace{(2a-r_1-r_2)}_{=0}$.
Ainsi $3(\omega - a)(\omega' - a) = \dfrac{r_2-r_1}{2}\dfrac{r_1-r_2}{2}$, puis $12\dfrac{\omega-a}{r_1-r_2} = \dfrac{r_2-r_1}{\omega'-a}$.
En passant aux arguments, il vient : $\left(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\ [2\pi]$.
Ainsi, $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{AF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\ [\pi]$ donc (M_1M_2) est une bissectrice des droites (AF) et (AF'), nécessairement extérieure à AFF', car sinon (M_1M_2) couperait $[FF']$.
D'après le lemme 1, (M_1M_2) est tangente à $\mathcal{E}$, en A.

→ On va montrer que (M_1M_3) est tangente à $\mathcal{E}$.[2]
On a : $P'(r_1) = 3\,(r_1-\omega)\,(r_1-\omega') = (r_1-r_2)\,(r_1-r_3)$.
Ainsi, $3\dfrac{\omega'-r_1}{r_3-r_1} = \dfrac{r_2-r_1}{\omega-r_1}$, donc $\left(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\ [2\pi]$.
On note (M_1T) l'autre tangente à $\mathcal{E}$ issue de M_1.[3]
Le lemme de Poncelet nous donne : $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1F}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_1F'}, \overrightarrow{M_1T}\right)\ [\pi]$.
Donc $\left(\overrightarrow{M_1F'}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1F}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M_1F'}, \overrightarrow{M_1T}\right)\ [\pi]$.
En conséquence, $(M_1M_3) = (M_1T)$ est tangente à $\mathcal{E}$.

→ Enfin, montrons que $C \in \mathcal{E}$.[4]
On note C' le point de tangence de (M_1M_3) et $\mathcal{E}$.
Par le lemme 1, (M_1M_3) est bissectrice extérieure de $\widehat{FC'F'}$ en C'.
Donc G, symétrique de F par rapport à (M_1M_3), vérifie : $G \in (F'C')$, autrement dit $C' \in (F'G)$.
Ainsi, $C' \in (F'G) \cap (M_1M_3)$.
Pour montrer que $C = C'$, on va montrer que $C \in (F'G)$.
En évaluant P' en c, comme on l'avait fait en a précédemment, on obtient que (M_1M_3) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FCF'}$.
Et donc aussi $C \in (F'G)$. Ayé. ∎

Références

[CAPES11] D.-J. Mercier et J.-É. Rombaldi – *Annales du CAPES externe de mathématiques (2009 à 2011)*, Publibook, 2011.
[Dbm1] G. Debeaumarché – *Manuel de mathématiques (volume 1)*, Ellipses, 2004.

2. On montrerait similairement que (M_2M_3) est tangente à $\mathcal{E}$.
3. Comprenez "autre que (M_1M_2)".
4. On montrerait similairement que $B \in \mathcal{E}$.