Table de caractères de $\mathcal{D}_n$

Leçons : 108, *102, 104, 107, 109, 154*

Librement inspiré de [Pey], paragraphe VIII.1.3

On va construire la table de caractères de $\mathcal{D}_n$.

On commence par chercher tous les caractères irréductibles de degré 1 ; ce sont les morphismes de groupes de $\mathcal{D}_n \to \mathbb{C}^*$.
Nécessairement, si χ est un caractère irréductible de degré 1 de $\mathcal{D}_n$, alors $\chi(s)^2 = \chi(\mathrm{e}) = 1$, donc $\chi(s) = \pm 1$.
Aussi, $\chi(sr)^2 = 1$, donc $\chi(s)\chi(r)\chi(s)\chi(r) = 1$, d'où $\chi(r) = \pm 1$.
La dernière relation que doivent vérifier les générateurs est $r^n = \mathrm{e}$.

→ Si n est pair, aucun problème.

→ Si n est impair, cela impose $\chi(r) = 1$.

On obtient donc deux cas :

Cas où n est pair :

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Les autres caractères irréductibles sont de degré $\geqslant 2$.

On pose $\omega_n = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$ et pour $h \in \mathbb{N}$, $\rho_h : \left| \begin{array}{ccc} r^k & \mapsto & \begin{pmatrix} \omega_n^{hk} & 0 \\ 0 & \omega_n^{-hk} \end{pmatrix} \\ sr^k & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & \omega_n^{-hk} \\ \omega_n^{hk} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

On devrait[1] ici vérifier que $\rho_h : \mathcal{D}_n \to \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}^2\right)$ est un morphisme de groupes, donc une représentation de $\mathcal{D}_n$ de degré 2. On note χ_h son caractère.
Maintenant, on remarque que :

- il suffit de prendre $h \in [\![0, n-1]\!]$, car $\omega_n^n = 1$;
- $\forall h \in [\![0, n-1]\!]$, ρ_h et ρ_{n-h} sont isomorphes, car $\forall g \in \mathcal{D}_n, \rho_h(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rho_{n-h}(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$; et on peut se restreindre à $h \in \left[\!\left[0, \frac{n}{2}\right]\!\right]$;
- $\chi_0 : \left| \begin{array}{ccc} r^k & \mapsto & 2 \\ sr^k & \mapsto & 0 \end{array} \right.$ donc $\chi_0 = \psi_1 + \psi_2$;
- $\chi_{\frac{n}{2}} : \left| \begin{array}{ccc} r^k & \mapsto & 2(-1)^k \\ sr^k & \mapsto & 0 \end{array} \right.$ donc $\chi_{\frac{n}{2}} = \psi_3 + \psi_4$.

On se restreint donc à $h \in \left[\!\left[1, \frac{n}{2} - 1\right]\!\right]$.
Soit $h \in \left[\!\left[1, \frac{n}{2} - 1\right]\!\right]$, supposons ρ_h réductible ; alors ρ_h admettrait une sous-représentation non-triviale.
Mais les seules droites stables par $\rho_h(r)$ sont $\mathbb{C}e_1$ et $\mathbb{C}e_2$ — où (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{C}^2$ — car $\omega_n^h \neq \omega_n^{-h}$.
Or, $\mathbb{C}e_1$ et $\mathbb{C}e_2$ ne sont pas stables par $\rho_h(s)$. Contradiction.
On obtient donc $\frac{n}{2} - 1$ nouvelles représentations irréductibles, de caractères :

	r^k	sr^k
χ_h	$2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$	0

De plus, les caractères χ_h, où h parcourt $\left[\!\left[1, \frac{n}{2} - 1\right]\!\right]$, sont bel et bien différents.

Vérifions qu'on a toutes les représentations irréductibles ; on calcule : $4 \times 1^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \times 2^2 = 2n = \#\mathcal{D}_n$.

1. Je n'aime pas ce développement parce qu'il est répétitif, ennuyeux, et parce que si on veut le faire rigoureusement du début à la fin, on doit s'empêtrer dans de longues considérations triviales... Mais il bouche un trou.

Cas où n est impair : Cette fois-ci, on n'a que 2 représentations de degré 1.

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

On définit, pour $h \in \left[\!\left[1, \dfrac{n-1}{2}\right]\!\right]$, les représentations ρ_h comme précédemment.
Elles sont toujours irréductibles et de caractères distincts (donc non-isomorphes). On obtient donc de nouveaux caractères irréductibles :

	r^k	sr^k
χ_h	$2\cos\left(\frac{2\pi hk}{n}\right)$	0

Enfin, on vérifie qu'on a bien fini le travail : $2 \times 1^2 + \dfrac{n-1}{2} \times 2^2 = 2n = \#\mathcal{D}_n$.

Références

[Pey] G. PEYRÉ – *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.