Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Leçons : 105, 107, 109, *104*

Librement inspiré de [Pey], paragraphe VIII.1.4

On va construire la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Étape 1 : On détermine les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$. C'est facile : deux éléments sont conjugués si, et seulement si, ils ont le même type. On obtient donc :
- Type [1] : l'identité, 1 élément.
- Type [2] : les transpositions, $6 = \binom{4}{2}$ éléments.
- Type [2,2] : les doubles-transpositions, $3 = \frac{\binom{4}{2}}{2}$ éléments.
- Type [3] : les 3-cycles, $8 = 2 \times \binom{4}{3}$ éléments.
- Type [4] : les 4-cycles, $6 = 3!$ éléments.

Il y a donc 5 classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$, donc $\mathfrak{S}_4$ admet 5 caractères irréductibles.

	[1] 1	[2] 6	[2,2] 3	[3] 8	[4] 6

Étape 2 : Les deux premières lignes sont faciles à remplir : il s'agit des caractères associés à la représentation triviale et au morphisme signature.

	[1] 1	[2] 6	[2,2] 3	[3] 8	[4] 6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1

Étape 3 : Intéressons maintenant à la représentation par permutations.
On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$ et on définit la représentation par permutation par :

$$\rho_P : \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_4 & \to & \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}^4\right) \\ \sigma & \mapsto & \left(e_i \mapsto e_{\sigma(i)}\right) \end{array} \right. .$$

Cette représentation laisse stable $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$, dont $H := \left\{x \in \mathbb{C}^4 \middle| x_1 + \ldots + x_4 = 0\right\}$ est un supplémentaire stable ; elle induit une représentation ρ_S (appelée "représentation standard") sur H.
Et comme ρ_P induit la représentation triviale sur $\mathrm{Vect}\{(1,1,1,1)\}$, on a la relation : $\chi_P = \chi_1 + \chi_S$.
Pour savoir si χ_S est irréductible, on doit calculer son carré scalaire ; il est facile de calculer χ_P, car on voit que $\chi_P(\sigma)$ compte le nombre de 1 sur la diagonale de la matrice de la permutation σ, c'est-à-dire le nombre de points fixes de σ.
On a $\#\mathfrak{S}_4 \langle \chi_S, \chi_S \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 3 \times (-1)^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 = 24$ donc $\langle \chi_S, \chi_S \rangle = 1$.
Donc χ_S est irréductible, on le rajoute à la table.

	[1] 1	[2] 6	[2,2] 3	[3] 8	[4] 6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1

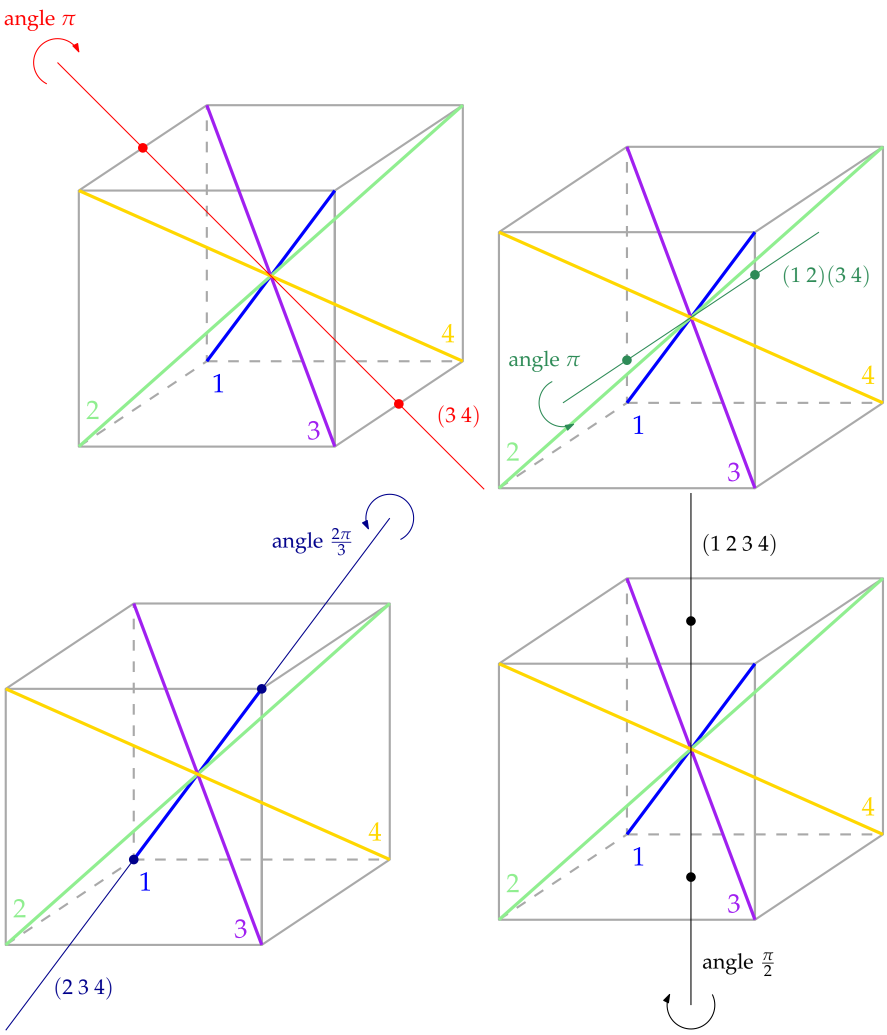
Étape 4 : Il nous reste deux caractères irréductibles, mais on peut déjà obtenir leur degré.

En effet, on a : $\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = \#\mathfrak{S}_4$, où n_i désigne le degré du $i^{\text{ème}}$ caractère irréductible.

On en déduit que $n_4^2 + n_5^2 = 13$, d'où $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$.[1]

	[1]	[2]	[2,2]	[3]	[4]
	1	6	3	8	6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
	2				
	3				

Étape 5 : Faisons un peu de géométrie. On sait que $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Isom}^+(\text{Cube})$.[2]



Ces figures permettent[a], sachant que, dans $\mathbb{R}^3$, la trace d'une rotation vectorielle d'angle θ est $1 + 2\cos\theta$, d'obtenir les valeurs de χ_C, caractère associé à la représentation de $\mathfrak{S}_4$ comme groupe des isométries positives du cube :

- $\chi_C([1]) = 3$;
- $\chi_C([2]) = -1$;
- $\chi_C([2,2]) = -1$;
- $\chi_C([3]) = 0$;
- $\chi_C([4]) = 1$.

Pour montrer que χ_C est irréductible, il suffit de montrer que $\langle \chi_C, \chi_C \rangle = 1$, de la même manière qu'on l'a fait pour χ_S précédemment.

a. Je trouve que c'est mieux de faire un patron de cube pendant la préparation plutôt que de vouloir faire des dessins au tableau. Vous avez pensé que vous n'aurez peut-être pas toutes les couleurs que vous voulez pour votre dessin ? L'État n'a plus les moyens d'acheter massivement des craies colorées pour l'organisation de l'agrégation de mathématiques... Pour ma main, un cube de 5 cm d'arête, avec des petits rabats à coller, c'est nickel.

1. Ou l'inverse, mais ça on s'en fout.

2. Ou pas ! Les grandes diagonales du cube, qui relient deux sommets diamétralement opposés, sont les plus grandes distances qu'on puisse trouver entre deux points d'un cube. Nécessairement, les isométries conservant les distances, l'ensemble $\mathcal{D}$ des grandes diagonales est laissé stable par n'importe quelle isométrie. On obtient une action de $\mathrm{Isom}^+(\text{Cube})$ sur $\mathcal{D}$ d'où un morphisme $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}^+(\text{Cube}) & \to & \mathfrak{S}_4 \\ g & \mapsto & g_{|\mathcal{D}} \end{array} \right.$. Il s'agit maintenant de montrer que φ est injectif ; soit g une isométrie du cube fixant chaque diagonale. On appelle $A_1, \ldots, A_4$ les sommets de face du bas du cube, et pour $i \in [\![1,4]\!]$, B_i est le sommet du cube diamétralement opposé à A_i. Supposons que g fixe un sommet, sans perte de généralité, disons : $g(A_1) = A_1$. Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$, et comme g fixe (A_2B_2), nécessairement, $g(A_2) = A_2$ et $g(B_2) = B_2$. Similairement, $g(A_3) = A_3$. Mais (A_1, A_2, A_3, B_2) est un repère affine de $\mathbb{R}^3$. Donc $g = \mathrm{Id}$. En revanche, si $\forall i \in [\![1,4]\!], g(A_i) = B_i$, alors on montre comme tout de suite que $s_0 g$ est l'identité, où s_0 désigne la symétrie centrale du cube. Mais on a alors une contradiction avec le fait que g soit une isométrie positive. En conclusion, φ est injective. Pour la surjectivité, il suffit d'exhiber la réalisation de chaque transposition (ce qui est un peu plus clair avec le premier des quatre dessins : il faut faire une rotation d'angle π autour d'axes rejoignant deux milieux d'arêtes opposées).

	[1] 1	[2] 6	[2,2] 3	[3] 8	[4] 6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
	2				
χ_C	3	-1	-1	0	1

Étape 6 : Enfin, on remplit la dernière ligne en utilisant : $\sum_{i=1}^{5} n_i \chi_i(s) = 0$ pour $s \neq \mathrm{Id}$.

	[1] 1	[2] 6	[2,2] 3	[3] 8	[4] 6
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
χ_4	2	0	2	-1	0
χ_C	3	-1	-1	0	1

Références

[Pey] G. PEYRÉ – *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.