Étude de $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$

Leçons : 254, 255 [1]

[Zui], 2.3.iv-3.1.2.iii-3.2.3.(3)-10.3.6.11)

Théorème

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
Cependant, on peut quand même lui associer une distribution appelée valeur principale de $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, qu'on définit par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x$$

On va montrer les résultats suivants :

1. $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre 1 ;
2. $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ et donc $\mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbb{R}$;
3. $\frac{\partial}{\partial x}(\ln|x|) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$;
4. $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution tempérée ;
5. $\widehat{\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)} = -2\mathrm{i}\pi \mathrm{H} + \mathrm{i}\pi$.

Démonstration :

1. $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$; montrons qu'elle vérifie la propriété de continuité.
   Soit K un compact de $\mathbb{R}$, et M tel que $K \subset [-M, M]$.
   Soit $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, on a :
   $$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x$$
   Par la formule de Taylor avec reste intégral :
   $$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} \varphi'(tx) x \,\mathrm{d}t = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(tx) \,\mathrm{d}t$$
   On pose $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx) \,\mathrm{d}t$, et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$; de plus : $\forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$.
   Ainsi :
   $$\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\varphi(x)}{x} \,\mathrm{d}x = \varphi(0) \underbrace{\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant M} \psi(x) \,\mathrm{d}x}_{I_2}$$
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant intégrable sur $[\varepsilon, M]$ et impaire, on obtient que $I_1 = 0$.
   D'autre part, on a : $\left|\mathbb{1}_{]-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,+\infty[}(x)\psi(x)\right| \leqslant |\psi(x)| \leqslant \|\varphi'\|_\infty$ intégrable sur $[-M, M]$.

1. On ne démontrera que les points 1, 2 et 3 dans la leçon 255 ; les points 2, 4 et 5 dans la leçon 254.

Donc, par convergence dominée, on a : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2 = \int_{|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x$.
Donc $\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \int_{|x|\leqslant M} \psi(x)\,\mathrm{d}x$, d'où : $\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant \underbrace{2M}_{C_K} \|\varphi'\|_\infty$.
Donc $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1. On veut montrer qu'elle est d'ordre 1 exactement : par l'absurde, on va supposer qu'elle est d'ordre 0.
Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$:

$$\exists C_K > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(K), \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle\right| \leqslant C_K \|\varphi\|_\infty$$

Soit donc $K = [0,2]$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ telle que : $\begin{cases} 0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ \varphi_n \equiv 1 \text{ sur } \left[\frac{1}{n}, 1\right] \\ \varphi_n \equiv 0 \text{ sur } \left]-\infty, \frac{1}{2n}\right] \cup [2, +\infty[\end{cases}$.

Alors, pour $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2n}$, on a :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$$

Donc $\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n\right\rangle\right| \geqslant \ln n \underbrace{\|\varphi_n\|_\infty}_{=1}$, ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_K \geqslant \ln n$ et on aboutit à une contradiction.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\left\langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle$$

On a utilisé au passage la convergence dominée car $\left|\mathbb{1}_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[}(x)\varphi(x)\right| \leqslant |\varphi(x)|$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Et comme $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, le support de la distribution $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ contient celui de la fonction constante et égale à 1, autrement dit $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\mathrm{supp}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbb{R}$.

3. Soit $f : x \mapsto \ln|x|$; $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ donc définit une distribution.[2]
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Là encore[3], on a utilisé la convergence dominée, car : $\left|\mathbb{1}_{]-\infty,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,+\infty[}(x)\ln|x|\varphi'(x)\right| \leqslant |\ln|x|\varphi'(x)|$ qui est intégrable, car φ est continue à support compact et f est localement intégrable.
On pose :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(-x)\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + [\ln(x)\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) \\ &= \ln\varepsilon[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. C'est une fonction continue hors de 0, et il ne se pose de problème qu'en 0. On utilise le critère de Riemann ; en effet : $\sqrt{x}\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc $\ln x = o_{0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est donc intégrable au voisinage de 0.

3. Si vous vous ennuyez en lisant ce développement, dites-vous bien que je me suis aussi ennuyé à l'écrire. Bah oui.

Or, on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, où $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc :

$$I_\varepsilon = \underbrace{-\varepsilon \ln \varepsilon}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0} \underbrace{[\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)]}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\psi(0)} - \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$$

D'où $\langle f', \varphi\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$.

4. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   Soit $\varepsilon \in]0,1[$, on a : $\displaystyle\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Or $x \mapsto \dfrac{\varphi(0)}{x}$ étant intégrable sur $[\varepsilon, 1]$ et impaire : $\displaystyle\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x = 0$.
   Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant 1} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
   Or, par convergence dominée [4], on obtient :
$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leqslant 1} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
   Et on en déduit alors :
$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leqslant 2\|\psi\|_\infty + \int_{|x|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,\|x \mapsto x\varphi(x)\|_\infty \leqslant 2\left\|\varphi'\right\|_\infty + 2\,\|x \mapsto x\varphi(x)\|_\infty$$
   Ce qui montre que $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est tempérée.
5. Pour plus de commodité, je vous propose de noter désormais $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.
   De l'égalité $xT = 1$, on déduit $\widehat{xT} = \widehat{1} = 2\pi\delta_0$.
   En conséquence, $-\dfrac{1}{\mathrm{i}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\widehat{T}\right) = 2\pi\delta_0$, d'où $\widehat{T} = -2\mathrm{i}\pi\mathrm{H} + C$, avec $C \in \mathbb{C}$ à déterminer.
   Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\langle \widehat{T\circ(-\mathrm{Id})}, \varphi\rangle = \langle T\circ(-\mathrm{Id}), \widehat{\varphi}\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\circ(-\mathrm{Id})\rangle$. [5]
   Mais on a : $\displaystyle\widehat{\varphi}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu}\,\mathrm{d}u = \widehat{\varphi\circ(-\mathrm{Id})}(x)$.
   Donc $\langle \widehat{T\circ(-\mathrm{Id})}, \varphi\rangle = \langle T, \widehat{\varphi\circ(-\mathrm{Id})}\rangle = \langle \widehat{T}, \varphi\circ(-\mathrm{Id})\rangle = \langle \widehat{T}\circ(-\mathrm{Id}), \varphi\rangle$.
$$\begin{aligned}\text{Mais } \langle T\circ(-\mathrm{Id}), \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{+\infty}^{+\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = -\langle T, \varphi\rangle.\end{aligned}$$
   On en déduit donc que $\widehat{T}\circ(-\mathrm{Id}) = \widehat{T\circ(-\mathrm{Id})} = -\widehat{T}$.
   On prend alors $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathbb{R}^+$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$.
   Ainsi : $C = \langle \widehat{T}\circ(-\mathrm{Id}), \varphi\rangle = -\langle \widehat{T}, \varphi\rangle = 2\mathrm{i}\pi - C$, d'où $C = \mathrm{i}\pi$. ■

Références

[Zui] C. ZUILY – *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Dunod, 2002.

4. On va peut-être pouvoir arrêter de détailler maintenant...
5. Notez qu'on a ici utilisé le fait que le jacobien de $(-\mathrm{Id})$ vaut 1.