Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein [1]

Leçons : 209, 228, 241, 249, 264, *201, 202, 260, 262*

[ZQ], parties VII.IV.1 et XIII.II.1.c

Théorème

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et ω son module de continuité uniforme, défini par :

$$\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)| \mid |u - v| \leqslant h\}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Bernstein de f :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors :

1. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et, plus précisément,
   $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - B_n\|_\infty \leqslant C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;
2. Cette majoration est essentiellement optimale, au sens où il existe f une fonction lipschitzienne, telle que : $\exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - B_n\|_\infty \geqslant \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Démonstration :

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid suivant la loi de Bernoulli $b(x)$ où $x \in [0,1]$.

Dès lors, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,x)$, nous fournit, par la loi des grands nombres :

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}[f(x)]=f(x)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$$

Il va s'agir de préciser cette intuition

1. On va avoir besoin du lemme suivant.

   Lemme

   Soit $h \in [0,1]$, $\lambda > 0$, tels que $\lambda h \in [0,1]$.
   Alors $\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$.

   Démonstration :

   Montrons d'abord que ω est sous-additive ; soient $\delta, \varepsilon > 0$.

   On définit $F : \left|\begin{array}{ccc} A_{\delta+\varepsilon} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |f(x) - f(y)| \end{array}\right.$, où $A_{\delta+\varepsilon} = \{(x,y) \in [0,1] \mid |x-y| \leqslant \delta + \varepsilon\}$.

   F est continue sur $A_{\delta+\varepsilon}$ compact donc $\exists\,(x_0,y_0) \in A_{\delta+\varepsilon}, \omega(\delta+\varepsilon) = |f(x_0) - f(y_0)|$.

   Soit $z \in [0,1]$, tel que $|x_0 - z| \leqslant \delta$ et $|y_0 - z| \leqslant \varepsilon$; ainsi

   $$\omega(\delta+\varepsilon) \leqslant |f(x_0) - f(z)| + |f(z) - f(y_0)| \leqslant \omega(\delta) + \omega(\varepsilon)$$

   Ainsi, par une récurrence immédiate, on en déduit : $\forall N \in \mathbb{N}, \omega(Nh) \leqslant N\omega(h)$.

   Et finalement : $\omega(\lambda h) \leqslant \omega\left((\lfloor\lambda\rfloor + 1)h\right) \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\,\omega(h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$. ■

1. Il faut être capable d'en déduire le théorème usuel énoncé habituellement sur l'intervalle $[a,b]$. La première partie du sujet de Mathématiques générales du concours cycle master des ENS de Cachan et Rennes en 2014 utilise le théorème de Weierstrass pour montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\mathbb{Z} \cap [a,b] = \varnothing$.

En particulier, on a : $\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right) \leqslant \left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}|f(x)-B_n(x)| &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right]\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\leqslant \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Or $\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2^2 = \mathbb{E}\left[\left(x-\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(x-\frac{S_n}{n}\right)+\mathbb{E}\left[x-\frac{S_n}{n}\right]^2 = \frac{\mathrm{Var}\, S_n}{n^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$.
Donc on obtient : $|f(x)-B_n(x)| \leqslant \left(\sqrt{x(1-x)}+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Soit $f : x \mapsto \left|x-\frac{1}{2}\right|$; on a :

$$\omega(h) = \sup\left\{\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|-\left|y-\frac{1}{2}\right|\right| \middle| |x-y| \leqslant h\right\} \leqslant \sup\{|x-y| \,|\, |x-y| \leqslant h\} = h$$

Désormais $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vaiid suivant la loi $b\left(\frac{1}{2}\right)$.
On a : $\|f-B_n\|_\infty \geqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right)-B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\right] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[|2S_n-n|\right]$.
Donc $\|f-B_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2n}\mathbb{E}\left[|\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n|\right]$, avec $\varepsilon_j = 2X_j-1$ variable de Rademacher, (ε_j) famille iid.
On pose[2] $Y = \prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)$, et alors, presque sûrement, on a :

$$|Y| = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\varepsilon_j^2}{n}} = \prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Par indépendance des ε_j pour $j \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_j Y\right] = \mathbb{E}\left[\varepsilon_j\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\right] = \left(\mathbb{E}\left[\varepsilon_j\right]+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\left[\varepsilon_j^2\right]\right)\prod_{k\neq j}\mathbb{E}\left[1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right] = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi on obtient :

$$\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j Y\right]\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\varepsilon_j Y\right]\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{n}}\right| = \sqrt{n}.$$

Alors que d'autre part :

$$\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j Y\right]\right| \leqslant \mathbb{E}\left[|\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n|\,|Y|\right] \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}\,\mathbb{E}\left[|\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n|\right].$$

Finalement : $\mathbb{E}\left[|\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n|\right] \geqslant \sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}}$ puis $\|f-B_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}n}} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. ∎

Références

[ZQ] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY – *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, 2013.

2. Ce "parachutage" correspond en fait à ce qu'on doit faire quand on veut démontrer l'inégalité de Khintchine, à la manière de ce qui est fait dans le livre de C. ZUILY et H. QUEFFÉLEC.