Florian Lemonnier florianlemonnier@live.fr

Équivalents et Développements (Limités et Asymptotiques)

1 Équivalents

1.1 Suites équivalentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ existe et vaut 1.
On note alors : $u_n \sim v_n$.

Si $u_n \sim v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.
Si $u_n \sim v_n$ et u est positive à partir d'un certain rang, alors v est positive à partir d'un certain rang.

Exercice 1 Vrai ou Faux
Soient quatre suites telles que : $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n$. Dire des assertions suivantes si elles sont vraies ou fausses.

- $a_n u_n \sim b_n v_n$
- $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$
- $a_n + u_n \sim b_n + v_n$
- $\frac{a_n}{u_n} \sim \frac{b_n}{v_n}$
- Pour $\alpha > 0$ et u et v positives à partir d'un certain rang, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$
- $u_n^n \sim v_n^n$

Autres comparaisons existantes :

- $u_n = o(v_n)$: (u_n) est négligeable devant (v_n) quand $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ existe et vaut 0
- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: (u_n) est dominée par (v_n) quand $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée

On a le résultat suivant : si $\alpha_n = o(u_n)$, alors $u_n \sim u_n + \alpha_n$.

Exercice 2 Exemple de suite définie de façon implicite
On se donne un entier $n \geq 1$ et on considère $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Faire l'étude de la fonction f_n.
2. Montrer qu'il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$. Donner un encadrement de u_n ainsi que son signe.
3. En remarquant que $f_n(u_n) = 0$, calculer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
4. En déduire la monotonie de la suite u.
5. Montrer que la suite u est convergente, on notera l sa limite.
6. Montrer que $u_n = \frac{1}{n}\left(1 - u_n^5\right)$. En déduire que $l = 0$.
7. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
8. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

1.2 Fonctions équivalentes

Deux fonctions f et g sont dites équivalentes en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe et vaut 1.
On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Fonction		Équivalent	Fonction		Équivalent	Fonction		Équivalent
$\sin x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$1-\cos x$	$\underset{0}{\sim}$	$\frac{x^2}{2}$	$\tan x$	$\underset{0}{\sim}$	x
$\arcsin x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\arctan x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\ln x$	$\underset{1}{\sim}$	$x-1$
$e^x - 1$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\operatorname{sh} x$	$\underset{0}{\sim}$	x	$\operatorname{th} x$	$\underset{0}{\sim}$	x
$(1+x)^\alpha - 1$	$\underset{0}{\sim}$	αx	$\operatorname{argsh} x$	$\underset{+\infty}{\sim}$	$\ln x$	$\operatorname{argsh} x$	$\underset{0}{\sim}$	x
$\operatorname{argch} x$	$\underset{+\infty}{\sim}$	$\ln x$	$\operatorname{argth} x$	$\underset{0}{\sim}$	x			

Exercice 3 Vrai ou Faux

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, alors $e^{f(x)} - 1 \underset{a}{\sim} f(x)$.
2. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors $e^{f(x)} \underset{a}{\sim} e^{g(x)}$.

Conclusion : On a le droit de composer des équivalents par la .... mais pas par la ....

Exercice 4 Application au calcul de limite
Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^{e^{2x}\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{\operatorname{ch}(\ln x)}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x - x\cos x)}{\sin x + \cos x - 1}$
4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$

Exercice 5
Déterminer, proprement, un équivalent simple en $+\infty$ de $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - 1$.

2 Développements limités

2.1 Généralités

f admet un DL_n au $\mathcal{V}_0$ si, et seulement si, il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que $f(x) = P_n(x) + o_0(x^n)$.
f admet un DL_n au $\mathcal{V}_a$ si, et seulement si, $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un DL_n au $\mathcal{V}_0$.
Si $p \leq n$ et f admet un DL_n au $\mathcal{V}_a$, alors f admet un DL_p au $\mathcal{V}_a$.
Si f admet un DL_n au $\mathcal{V}_a$, alors celui-ci est unique.

Exercice 6 Vrai ou Faux
Soit f une fonction admettant un DL_n en 0 de partie régulière P_n.

- Si f est paire (resp. impaire), alors P_n est pair (resp. impair).
- Si P_n est pair (resp. impair), alors f est paire (resp. impaire).
- Admettre un DL_0, c'est être localement continu.
- Admettre un DL_1, c'est être localement dérivable.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, admettre un DL_n, c'est être localement de classe $\mathcal{C}^n$.

2.2 Opérations

Soient f et g deux fonctions admettant un DL_n en a, de parties régulières P et Q. Alors :

- $f+g$ admet un DL_n en a de partie régulière $P+Q$;
- λf admet un DL_n en a de partie régulière λP ;
- fg admet un DL_n en a de partie régulière R : la troncature de PQ au degré n.

Si, de plus, h est une fonction admettant un DL_n en $f(a)$, alors $h \circ f$ admet un DL_n en a.

Exercice 7 Vrai ou Faux
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$, intervalle réel, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $n \in \mathbb{N}$.

- Si f admet un DL_n en 0 de partie régulière Q, alors f' admet un DL_{n-1} en 0 de partie régulière Q'.
- Si f' admet un DL_n en 0 de partie régulière Q,
  alors f admet un DL_{n+1} en 0 de partie régulière P avec $P' = Q$ et $P(0) = f(0)$.

2.3 Formules de *Taylor*

Formule de *Taylor-Young* :
Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$, f $\mathcal{C}^n$ sur I ;

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o_a\left((x-a)^n\right)$$

Inégalités de *Taylor-Lagrange* :
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
$f^{(n+1)}$ étant continue sur le segment $[a;b]$, elle est bornée par $[m;M]$, et on obtient :

$$m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Formule de *Taylor* avec reste intégral :
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

2.4 Méthodes de calcul

Tous les développements ici sont au voisinage de 0	
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o_0\left(x^n\right)$	$\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k + o_0\left(x^n\right)$
$\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o_0\left(x^n\right)$	$\ln(1+x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} + o_0\left(x^n\right)$
$\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0\left(x^n\right)$	
$\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right)$	$\operatorname{ch} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0\left(x^{2n+1}\right)$
$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right)$	$\operatorname{sh} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0\left(x^{2n+2}\right)$
$\arctan x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0\left(x^{2n+2}\right)$	$\operatorname{argth} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0\left(x^{2n+2}\right)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0\left(x^n\right)$	
$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0\left(x^6\right)$	$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_0\left(x^6\right)$

Exercice 8 Autour de la fonction tangente

1. Quelle remarque intéressante peut simplifier l'obtention du développement limité de tangente en 0 ?
2. Dans cette question, on va déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de tangente de différentes façons.
   (a) En utilisant la relation fonctionnelle entre tangente, sinus et cosinus.
   (b) En utilisant la formule de *Taylor-Young*.
   (c) En utilisant le théorème d'intégration des développements limités.
   (d) En utilisant le développement limité de la fonction réciproque arctangente.
   (e) En partant de l'équivalent de tangente en 0, puis en utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$.
3. En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x - \frac{x^3}{3}}{x^5}$.
4. Pour $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$, encadrer $\tan x$ par deux polynômes de degré 5.

Exercice 9
Déterminer les développements limités suivants.

1. $\dfrac{\sin x}{x}$, ordre 2 en 0
2. $\ln(3+x)$, ordre 2 en 0
3. $\ln\left(e^{2x} + 2e^x + 3\right)$, ordre 2 en 0
4. $\cos x \ln(1+x)$, ordre 4 en 0
5. $\dfrac{1}{(2-x)^2}$, ordre 3 en 0
6. $\dfrac{1}{1-x}$, ordre 4 en 2
7. $\ln\left(1+x^2\right)$, ordre 2 en 1
8. $\sin x$, ordre 3 en $\dfrac{\pi}{6}$
9. $\dfrac{x}{\sin x}$, ordre 4 en 0
10. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, ordre 3 en 0
11. $\ln(\cos x)$, ordre 6 en 0
12. $\arctan \dfrac{1+x}{1+2x}$, ordre 3 en 0
13. $\sqrt{\cos x^3 + \operatorname{ch} x^3 - 2}$, ordre 17 en 0
14. $\displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+t)\ln(1-t)\,dt$, ordre 3 en 0

Exercice 10 Exemple de développement limité d'une fonction réciproque
On note $f : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+x^2\right) - x \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f^{-1}.

2.5 Généralisations

2.5.1 Développement limité au voisinage de ∞

Pour obtenir un développement limité de $f(x)$ au voisinage de ∞, poser $h = \dfrac{1}{x}$, et déterminer le développement limité de la fonction obtenue pour h au voisinage de 0.
C'est notamment la méthode qu'on utilise pour déterminer le développement limité d'une suite.

Exercice 11
Déterminer les développements limités suivants.

1. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, ordre 2 en $+\infty$
2. $\dfrac{x^2+2}{x^2+x}$, ordre 2 en $+\infty$
3. $\dfrac{\sin \frac{1}{x}}{x+1}$, ordre 4 en $+\infty$
4. $\sqrt[3]{n^3+n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$, ordre 2

2.5.2 Développement limité généralisé et développement asymptotique

C'est l'extension de la notion de développement limité aux fonctions qui n'admettent pas de limite finie au point étudié. On peut aussi s'autoriser la présence de logarithmes, d'exponentielles, de racines…

Exercice 12
Déterminer les développements suivants.

1. $\dfrac{e^x}{x}$, précision x^3 en 0
2. $\cot x$, précision x^4 en 0
3. $\dfrac{\cos x}{\ln(1+x)}$, précision x^3 en 0
4. $\dfrac{1}{\sin^3 x}$, précision x^2 en 0
5. $\dfrac{1}{x\,(e^x-1)} - \dfrac{1}{x^2}$, précision x^2 en 0
6. $\sqrt{x+x^2}$, précision x^2 en 0
7. $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$, précision x^2 en 0
8. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$, précision x^2 en 0
9. $\dfrac{x^3+4}{x-1}$, précision $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$
10. $\dfrac{x^2-1}{x+2+e^{-x}}$, précision $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$
11. $\dfrac{e^x}{1-\cos x}$, précision x en 0
12. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$, précision $\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$
13. $\ln\left(x+x^2\right)$, précision x^3 en 0 et $\dfrac{1}{x^3}$ en $+\infty$

2.6 Applications

Exercice 13 Déterminer un équivalent de :

1. $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$
2. $f(x) = \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - \cos x$ en 0
3. $g(x) = \sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$ en 0

Exercice 14 Calculer.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1-x}}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\sin x - \cos x}{(e^x-1)^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) + \sin x - 2x}{x^5}$

Exercice 15 Classe d'un prolongement par continuité

Démontrer que la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \end{array}\right.$ est prolongeable par continuité en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 16 Étude locale de courbes paramétrées
Donner la nature des points singuliers des courbes paramétrées suivantes :

1. $x = e^{t-1} - t$, $y = t^3 - 3t$
2. $x = \tan t + \sin t$, $y = \dfrac{1}{\cos t}$
3. $x = (u+2)e^{\frac{1}{u}}$, $y = (u-2)e^{\frac{1}{u}}$
4. $x = u^u$, $y = u^{\frac{1}{u}}$