Arrêt optimal de type Wald pour le mouvement brownien

Florian Lemonnier

Séminaire

Encadré par Mihai Gradinaru

14 janvier 2016

On fixe $c > 0$ et $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant :
$\exists\gamma > 0, \exists\delta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, G(|x|) \leq \gamma x^2 + \delta$.

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, de filtration canonique $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, vérifiant les conditions habituelles.

Objectif : maximiser la quantité $\mathbb{E}\left[G(|B_\tau|) - c\tau\right]$, où τ parcourt l'ensemble des $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt intégrables.

Lemme

Le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une martingale.*

Lemme

Le processus $\left(B_t^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *est une martingale.*

Lemme

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, *on a* $\mathbb{E}\left[B_\tau^2\right] = \mathbb{E}[\tau]$.

On souhaite maximiser $\mathbb{E}\left[B_\tau^2 - c\tau\right] = (1-c)\mathbb{E}[\tau]$.

- Si $c \in]0,1[$, alors le supremum vaut $+\infty$ en considérant les temps d'arrêt constants $\tau \equiv n$ et en faisant tendre n vers l'infini.
- Si $c = 1$, alors le maximum vaut 0 et tous les temps d'arrêt sont optimaux.
- Si $c \in]1,+\infty[$, alors le maximum vaut 0 et est atteint pour le temps d'arrêt identiquement nul.

On souhaite maximiser $\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - c\tau\right]$, où $p \in]0,2[$ et $c > 0$.

Théorème (Arrêt optimal de Wald)

Le temps d'arrêt optimal pour notre problème est défini par

$$\tau^*_{p,c} = \inf\left\{ t \geq 0 \middle| |B_t| = \left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{1}{2-p}} \right\}.$$

De plus, on a la borne suivante :

$$\sup_\tau \mathbb{E}\left[|B_\tau|^p - c\tau\right] = \frac{2-p}{2}\left(\frac{p}{2c}\right)^{\frac{p}{2-p}},$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

$$V_\tau(G,c) := \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\, \mathrm{d}F_{B_\tau}(x)$$

On maximise $D_{G,c} : x \mapsto G(|x|) - cx^2$.

$$V_\tau(G,c) := \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\, \mathrm{d}F_{B_\tau}(x)$$

On maximise $D_{G,c} : x \mapsto G(|x|) - cx^2$.

- Si $D_{G,c}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$, en $x_{\max}$, alors

$$V_\tau(G,c) \leq D_{G,c}\left(x_{\max}\right),$$

avec égalité pour $\tau^*_{G,c} = \inf\{t \geq 0 | |B_t| \geq x_{\max}\} = T_{x_{\max}}$.

$$V_\tau(G,c) := \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right) \, \mathrm{d}F_{B_\tau}(x)$$

On maximise $D_{G,c} : x \mapsto G(|x|) - cx^2$.

- Si $D_{G,c}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$, en $x_{\max}$, alors

$$V_\tau(G,c) \leq D_{G,c}\left(x_{\max}\right),$$

avec égalité pour $\tau^*_{G,c} = \inf\{t \geq 0 | |B_t| \geq x_{\max}\} = T_{x_{\max}}$.

- Sinon, $D_{G,c}$ atteint son maximum en $+\infty$, d'où :

$$V_\tau(G,c) \leq \lim_{x \to +\infty} D_{G,c}(x).$$

Mais en considérant les temps d'arrêts intégrables T_r $(r > 0)$:

$$\forall r > 0, \sup_\tau \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] \geq D_{G,c}(r).$$

Puis, par un passage à la limite,

$$\sup_\tau \mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] = \lim_{x \to +\infty} D_{G,c}(x).$$

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, et soit τ un temps d'arrêt intégrable. Pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leq c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)$$

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, et soit τ un temps d'arrêt intégrable. Pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right) - c\tau\right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leq c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)$$

Proposition

On a :

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leq \inf_{c>0} \left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\right),$$

en d'autres termes,

$$\sup_{\tau} \left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0} \left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) \leq 0.$$

Proposition

On a :

$$\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] \leq \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right),$$

en d'autres termes,

$$\sup_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) \leq 0.$$

S'il existe $\gamma > 0$ tel que $x \mapsto G(|x|) - \gamma x^2$ atteint son maximum (disons en $x_{\max}$), alors

$$\mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}}}\right|\right)\right] = \gamma\mathbb{E}\left[T_{x_{\max}}\right] + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|) - \gamma x^2\right).$$

S'il existe $\gamma > 0$ tel que $x \mapsto G(|x|) - \gamma x^2$ atteint son maximum (disons en $x_{\max}$), alors

$$\mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}}}\right|\right)\right] = \gamma \mathbb{E}\left[T_{x_{\max}}\right] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - \gamma x^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sup_{\tau} \left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0} \left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) \\
&\quad = \sup_{\tau} \sup_{c>0} \left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - c\mathbb{E}[\tau] - \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - cx^2\right)\right) \\
&\quad \geq \mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}}}\right|\right)\right] - \gamma \mathbb{E}\left[T_{x_{\max}}\right] - \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - \gamma x^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

S'il existe $\gamma > 0$ tel que $x \mapsto G(|x|) - \gamma x^2$ atteint son maximum (disons en $x_{\max}$), alors

$$\mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}}}\right|\right)\right] = \gamma \mathbb{E}\left[T_{x_{\max}}\right] + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(G(|x|) - \gamma x^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau} &\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) \\
&= \sup_{\tau} \sup_{c>0} \left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - c\mathbb{E}[\tau] - \sup_{x \in \mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right) \\
&\geq \mathbb{E}\left[G\left(\left|B_{T_{x_{\max}}}\right|\right)\right] - \gamma \mathbb{E}\left[T_{x_{\max}}\right] - \sup_{x \in \mathbb{R}}\left(G(|x|) - \gamma x^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

On a donc optimalité dans ce cas :

$$\sup_{\tau} \left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right] - \inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau] + \sup_{x \in \mathbb{R}}\left(G(|x|) - cx^2\right)\right)\right) = 0.$$

Proposition

Similairement,

$$\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|)-cx^2\right)\right)\leq\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right],$$

avec optimalité quand il existe $\gamma>0$ *tel que* $x\mapsto G(|x|)-\gamma x^2$ *atteigne son minimum.*

On a vu que

$$\sup_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right]-\inf_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|)-cx^2\right)\right)\right)=0,$$

quand il existe $\gamma > 0$ tel que $x \mapsto G(|x|) - \gamma x^2$ atteigne son maximum.

Corollaire

Si $p \in]0,2[$, alors on a :

$$\sup_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p\right]-\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}\right)=0,$$

le supremum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

On a vu que

$$\inf_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[G\left(|B_\tau|\right)\right]-\sup_{c>0}\left(c\mathbb{E}[\tau]+\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(G(|x|)-cx^2\right)\right)\right)=0,$$

quand il existe $\gamma>0$ tel que $x\mapsto G(|x|)-\gamma x^2$ atteigne son minimum.

Corollaire

Si $p\in]2,+\infty[$, alors on a :

$$\inf_{\tau}\left(\mathbb{E}\left[|B_\tau|^p\right]-\mathbb{E}[\tau]^{\frac{p}{2}}\right)=0,$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble des temps d'arrêt intégrables.

Comme $\sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ a même loi que $|B_t|$:

Proposition

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq \tau} B_s\right] = \mathbb{E}\left[|B_\tau|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}[\tau]}.$$

De plus, le temps d'arrêt $T_a = \inf\{t \geq 0 | |B_t| \geq a\}$ réalise

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T_a} B_s\right] = \sqrt{\mathbb{E}\left[T_a\right]},$$

pour tout $a > 0$.

Proposition

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq\tau}|B_s|\right]\leq\sqrt{2\mathbb{E}[\tau]}.$$

Proposition

Pour tout temps d'arrêt intégrable τ, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq\tau}|B_s|\right]\leq\sqrt{2\mathbb{E}[\tau]}.$$

Le temps d'arrêt $\tau^* = \inf\left\{t\geq 0\middle|\sup_{0\leq s\leq t}|B_s|-|B_t|\geq a\right\}$ réalise $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq\tau^*}|B_s|\right]=\sqrt{2\mathbb{E}\left[\tau^*\right]}$.