Étude d'EDSR ergodiques sous divers jeux d'hypothèses et applications aux équations HJB et au problème de contrôle ergodique optimal*

(Mémoire de stage de Master 2)
Mars-Juin 2016

Florian Lemonnier
Sous la direction de Ying Hu

ENS Rennes — Université de Rennes 1

---

*Ce document a pour base les articles [FHT09], [DHT10] et [HMR15].

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce stage était d'étudier trois articles de recherche qui s'intéressent aux EDSR ergodiques et à leurs applications. Dans un but de simplification, ce rapport se place dans le cadre de la dimension finie, alors que les articles originaux faisaient apparaître des espaces plus généraux (espaces de Hilbert, voire espaces de Banach).

Le premier article ([FHT09], voir en section 3) permet une première approche sous des hypothèses restrictives (par exemple, le *drift* de l'EDS sous-jacente est supposé continu). Après avoir étudié une première EDS (intégrabilité et dépendance à la condition initiale de la solution notamment), on introduit une EDSR dite "ergodique" :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^x\right) - \lambda\right) \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^x \,.\, \mathrm{d}W_\sigma, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty,$$

où W désigne un mouvemnt brownien d-dimensionnel et dont l'inconnue est le triplet (Y, Z, λ), avec Y et Z des processus adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$, et λ un nombre réel. Pour établir l'existence et l'unicité des solutions de cette équation, on s'appuie sur des résultats bien connus à propos des EDSR qu'on pourrait dénommer "classiques", c'est-à-dire de la forme :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T f\left(X_\sigma^x, Y_\sigma^x, Z_\sigma^x\right) \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^{x,\alpha} \,.\, \mathrm{d}W_\sigma, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty.$$

Puis, sous des hypothèses supplémentaires de régularité de F et ψ, on s'intéresse à la différentiabilité des processus solutions.

Enfin, l'étude de ce premier article s'achève sur deux applications : d'une part, la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique (d'inconnues la fonction v et le réel λ)

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \nabla v(x) G\right) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $G \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et où $\mathcal{L}$ est l'opérateur défini formellement de la façon suivante :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 f(x)\right) + \langle F(x), \nabla f(x)\rangle\,;$$

d'autre part, la résolution d'un problème de contrôle optimal.

L'étude du second article ([DHT10]) suit à peu près le même schéma. La principale différence réside dans l'affaiblissement de certaines hypothèses, par rapport au premier article. Aussi, et à la différence de l'article original, le coefficient de diffusion de l'EDS sous-jacente n'est pas ici supposé constant (mais borné, globalement lipschitzien et d'inverse borné) ; le principal point de blocage à cette généralisation était la démonstration du théorème 4.1.3, mais le fait de travailler en dimension finie nous a permis d'utilier le lemme d'Aronson (voir [Aro67]) et d'outrepasser cette difficulté.

Enfin, le troisième article ([HMR15]) s'intéresse davantage au lien entre l'EDSR à horizon fini

$$Y_s^{T,t,x} = \xi^T + \int_s^T f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{T,t,x}\right) \mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{T,t,x} \,.\, \mathrm{d}W_r \quad \text{pour tout } s \in [t, T]$$

et l'EDSR ergodique

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left\{f\left(X_s^x, Z_s^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T < \infty.$$

Sous de nouvelles hypothèses, on regarde le comportement en temps long des solutions de ces deux équations, ce qui apporte de nouvelles informations sur le problème de contrôle optimal.

2 Notations

On désignera par $|\bullet|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{R}^l$; éventuellement, on précisera l'espace en indice. Les produits scalaires dans $\mathbb{R}^d$ et dans $\mathbb{R}^l$ seront désignés par $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ou par $\bullet \,.\, \bullet$.

Pour une fonction bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on notera $\|\phi\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} |\phi(x)|$.

Si ϕ est globalement lipschitzienne, alors on écrira $\|\phi\|_{\text{lip}} = \sup\limits_{x,x' \in \mathbb{R}^d,\, x \neq x'} \dfrac{|\phi(x) - \phi(x')|}{|x - x'|}$.

Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, on considère les ensembles suivants de processus stochastiques à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:

- $\mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$, où $p \in [1, \infty[$ et $T > 0$, est l'espace des processus prédictibles Y à trajectoires continues sur $[0,T]$ et tels que :

$$|Y|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)} = \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |Y_t|^p_{\mathbb{R}^d}\right] < \infty;$$

- $\mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$, où $p \in [1, \infty[$ et $T > 0$, est l'espace des processus prédictibles Y sur $[0,T]$ et tels que :

$$|Y|^p_{\mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)} = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_t|^2_{\mathbb{R}^d}\, \mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}}\right] < \infty;$$

- $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\text{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0, \infty; \mathbb{R}^d\right)\right)$ est l'espace des processus prédictibles Y sur $[0, \infty[$, qui appartiennent à $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ pour tout $T > 0$.

3 Un première étude sous des hypothèses fortes

Dans cette première section, on imposera à certains coefficients qu'ils soient continus à croissance polynomiale (ce sera le cas de la fonction F) ou bien globalement Lipschitz (comme pour la fonction ψ qui apparaîtra dans l'EDSR de cette section). Ces hypothèses seront allégées par la suite.

3.1 Étude préliminaire d'une EDS

On se place dans un espace probabilisé complet noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dans cette section, on va s'intéresser à l'équation différentielle stochastique (abrégée en "EDS") qui suit.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{d}X_t & = & F\left(X_t\right) \mathrm{d}t + G \,\mathrm{d}W_t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 & = & x \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

Dans l'EDS (3.1.1), F est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même, G une application linéaire de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^d$, W un mouvement brownien l-dimensionnel et x un élément de $\mathbb{R}^d$ (où d et l sont deux entiers naturels non-nuls). Aussi, pour tout $t \geqslant 0$, on désignera par $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $\{W_s,\ s \in [0,t]\}$ et les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables. Pour simplifier, dans la suite, on dira qu'un processus est adapté quand il est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Hypothèse 3.1.1

La fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est :
- continue ;
- à croissance polynomiale, c'est-à-dire

$$\exists c > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |F(x)| \leqslant c\left(1 + |x|^k\right);$$

- strictement monotone, au sens où

$$\exists \eta > 0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,\ \langle x_1 - x_2, F\left(x_1\right) - F\left(x_2\right)\rangle \leqslant -\eta \left|x_1 - x_2\right|^2.$$

3.1.1 Résolution de l'EDS

Sous cette hypothèse sur la fonction F, on peut alors montrer le théorème fondamental suivant.

Théorème 3.1.2

On se place dans le cadre de l'hypothèse 3.1.1.
Alors l'EDS (3.1.1) admet une unique solution forte définie sur $\mathbb{R}_+$, *id est* un processus X à trajectoires continues, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant $\mathbb{P}$-p.s.

$$X_t = x + \int_0^t F\left(X_s\right) \mathrm{d}s + GW_t, \quad t \geqslant 0.$$

Démonstration :
Voir le théorème 5.5.8 de [DZ92]. ■

Remarque 3.1.3. L'unicité des solutions de l'EDS (3.1.1) nous permet d'obtenir quelques relations utiles pour la suite.
Soit $v \in \mathbb{R}_+$; on définit un nouveau mouvement brownien $B_t = W_{t+v} - W_v$, dont on note $(\mathcal{G}_t)$ la filtration naturelle.
On note $\widetilde{X}^x$ la solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'EDS suivante :

$$\widetilde{X}_t^x = x + \int_0^t F\left(\widetilde{X}_s^x\right) \mathrm{d}s + GB_t. \tag{3.1.2}$$

Aussi, on considère $X^{v,\theta}$ le processus solution de l'EDS commencée au temps v et issue de θ, variable aléatoire $\mathcal{F}_v$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et de carré intégrable :

$$X_t^{v,\theta} = \theta + \int_t^v F\left(X_s^{v,\theta}\right)\, \mathrm{d}s + G\left(W_t - W_v\right); \tag{3.1.3}$$

par ailleurs, on convient que $X_t^{v,x} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}[\theta]$ si $t \leqslant v$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t^x &= x + \int_0^t F\left(\widetilde{X}_s^x\right)\, \mathrm{d}s + G\left(W_{t+v} - W_v\right), \\
X_{t+v}^{v,x} &= x + \int_0^t F\left(X_{s+v}^{v,x}\right)\, \mathrm{d}s + G\left(W_{t+v} - W_v\right).
\end{aligned}$$

Par unicité forte, on a donc :

$$\forall t \geqslant 0,\ \widetilde{X}_t^x = X_{t+v}^{v,x} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \tag{3.1.4}$$

Et l'unicité forte impliquant l'unicité en loi, on a également $X^x \overset{\mathcal{L}}{=} \widetilde{X}^x$, d'où :

$$\left(X_t^x\right)_{t\geqslant 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(X_{t+v}^{v,x}\right)_{t\geqslant 0}. \tag{3.1.5}$$

3.1.2 Dépendance de la solution vis-à-vis de sa condition initiale

Dans la suite de ce document, cette unique solution à l'EDS (3.1.1) issue du point $x \in \mathbb{R}^d$ sera notée X^x. On s'intéresse désormais à la dépendance de la solution vis-à-vis de sa condition initiale.

Proposition 3.1.4

On se place dans le cadre de l'hypothèse 3.1.1.
Alors on a

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,\ \left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}\left|x_1 - x_2\right|.$$

Démonstration :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. Le théorème précédent fournit :

$$\forall t \geqslant 0,\ X_t^{x_1} - X_t^{x_2} = x_1 - x_2 + \int_0^t \left(F\left(X_s^{x_1}\right) - F\left(X_s^{x_2}\right)\right) \mathrm{d}s.$$

Comme la fonction F est continue, l'application $X_\bullet^{x_1} - X_\bullet^{x_2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right) = F\left(X_t^{x_1}\right) - F\left(X_t^{x_2}\right).$$

En conséquence, $\left|X_\bullet^{x_1} - X_\bullet^{x_2}\right|^2$ est une application dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2 = 2\left\langle X_t^{x_1} - X_t^{x_2}, F\left(X_t^{x_1}\right) - F\left(X_t^{x_2}\right)\right\rangle \leqslant -2\eta\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2.$$

On en déduit alors que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{2\eta t}\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2\right) = 2\eta \mathrm{e}^{2\eta t}\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2 + \mathrm{e}^{2\eta t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2 \leqslant 0.$$

Finalement, ceci implique que pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{2\eta t}\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right|^2 \leqslant \left|x_1 - x_2\right|^2$, d'où :

$$\left|X_t^{x_1} - X_t^{x_2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}\left|x_1 - x_2\right|.$$

■

3.1.3 Intégrabilité de la solution

Les deux propositions qui suivent vont nous permettre de contrôler l'espérance de la solution de l'EDS considérée dans cette section.

Proposition 3.1.5

On se place dans le cadre de l'hypothèse 3.1.1.
Alors, pour n'importe quels $T > 0$ et $p \geqslant 1$, il existe une constante $C_{p,T}$ finie et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x|^p\right] \leqslant C_{p,T}\left(1+|x|^p\right).$$

Démonstration :

On fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on pose $Z_t = X_t^x - GW_t$. Ainsi, $Z_\bullet$ est dérivable et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_t = F\left(X_t^x\right)$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons temporairement que $Z_s \neq 0$, pour tout $s \in [0,t]$.
Ainsi, la fonction $|Z_\bullet|$ est dérivable sur $[0,t]$ et

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|Z_s| &= \frac{\langle Z_s, F\left(X_s^x\right)\rangle}{|Z_s|} = \frac{\langle Z_s, F\left(Z_s+GW_s\right)-F\left(GW_s\right)\rangle + \langle Z_s, F\left(GW_s\right)\rangle}{|Z_s|} \leqslant \frac{-\eta\,|Z_s|^2 + |Z_s|\,|F\left(GW_s\right)|}{|Z_s|}\\ &\leqslant -\eta\,|Z_s| + |F\left(GW_s\right)|.\end{aligned}$$

En conséquence, reproduisant l'idée déjà présente dans la preuve précédente, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{\eta s}|Z_s|\right) \leqslant \mathrm{e}^{\eta s}\,|F\left(GW_s\right)|.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient alors

$$|Z_t| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x| + \int_0^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,|F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s. \tag{3.1.6}$$

Cette inégalité reste évidemment vraie si $Z_t = 0$; et si jamais t_0 désigne le dernier instant d'annulation de $Z_\bullet$ avant le temps t, on montre de même :

$$|Z_t| \leqslant \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,|F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x| + \int_0^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,|F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s.$$

En définitive, l'inégalité (3.1.6) demeure vraie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
On en déduit que

$$|X_t^x| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x| + |GW_t| + \int_0^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\,|F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s \leqslant |x| + |GW_t| + \int_0^t |F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, pour la fonction convexe $x \mapsto x^p$ — rappelons que $p \geqslant 1$ —, il vient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t^x|^p\right] \leqslant 3^{p-1}\left(|x|^p + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|GW_t|^p\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t |F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s\right)^p\right]\right).$$

Intéressons-nous au dernier terme : par une nouvelle utilisation de cette même inégalité, on montre que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t |F\left(GW_s\right)|\,\mathrm{d}s\right)^p\right] &\leqslant T^p\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|F\left(GW_t\right)|^p\right] \leqslant T^p c^p \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(1+|GW_t|^k\right)^p\right]\\ &\leqslant T^p c^p 2^{p-1}\left(1+\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|GW_t|^{kp}\right]\right).\end{aligned}$$

L'équivalence des normes en dimension finie et l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy nous permet de démontrer que :

$$\forall p \geqslant 1,\ \forall T \geqslant 0,\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|GW_t|^p\right] < \infty.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Proposition 3.1.6

On se place toujours sous l'hypothèse 3.1.1.
Soit γ un processus adapté, borné et à valeurs dans $\mathbb{R}^l$; en notant $X^{x,\gamma}$ la solution forte de l'EDS

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{x,\gamma} &= F\left(X_t^{x,\gamma}\right)\,\mathrm{d}t + G\,\mathrm{d}W_t + G\gamma_t\,\mathrm{d}t, \quad t \geqslant 0 \\ X_0 &= x \end{cases} \tag{3.1.7}$$

il vient

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right] \leqslant C_\gamma\left(1+|x|^2\right),$$

pour une certaine constante C_γ ne dépendant que de la norme uniforme de γ.
En particulier, on en déduit (avec $\gamma \equiv 0$)

$$\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{x}\right|^2\right] \leqslant C\left(1+|x|^2\right),$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration :

Par la formule d'Itô, on obtient

$$\mathrm{d}\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2 = 2\left\langle X_t^{x,\gamma}, F\left(X_t^{x,\gamma}\right) + G\gamma_t\right\rangle\,\mathrm{d}t + 2\left\langle X_t^{x,\gamma}, G\,\mathrm{d}W_t\right\rangle + \left(\sum_{i,j} g_{i,j}^2\right)\mathrm{d}t.$$

En intégrant, puis en prenant l'espérance, on en déduit

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right] - |x|^2 = 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\langle X_s^{x,\gamma}, F\left(X_s^{x,\gamma}\right) + G\gamma_s\right\rangle\,\mathrm{d}s\right] + \left(\sum_{i,j} g_{i,j}^2\right) t.$$

Mais, par monotonie de F, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle F\left(X_s^{x,\gamma}\right) + G\gamma_s, X_s^{x,\gamma}\right\rangle = \left\langle F\left(X_s^{x,\gamma}\right) - F(0), X_s^{x,\gamma}\right\rangle + \left\langle F(0) + G\gamma_s, X_s^{x,\gamma}\right\rangle &\leqslant -\eta\left|X_s^{x,\gamma}\right|^2 + |F(0)+G\gamma_s|\left|X_s^{x,\gamma}\right| \\ &\leqslant -\frac{\eta}{2}\left|X_s^{x,\gamma}\right|^2 + \frac{|F(0)+G\gamma_s|^2}{2\eta}\end{aligned}$$

(au passage, on a utilisé l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ qui provient d'une identité remarquable).
On a alors, après application du théorème de Fubini (pour intervertir espérance et intégrale) :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\eta t}\mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right]\right) &= \mathrm{e}^{\eta t}\left(\eta\mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left\langle X_t^{x,\gamma}, F\left(X_t^{x,\gamma}\right) + G\gamma_t\right\rangle\right] + \sum_{i,j} g_{i,j}^2\right) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{\eta t}\left(\frac{|F(0)+G\gamma_t|^2}{\eta} + \sum_{i,j} g_{i,j}^2\right).\end{aligned}$$

Soit C_γ une constante qui majore uniformément $\dfrac{|F(0)+G\gamma_t|^2}{\eta} + \sum_{i,j} g_{i,j}^2$, dépendant uniquement de la norme uniforme de γ. En intégrant l'inégalité précédente, on obtient :

$$\mathrm{e}^{\eta t}\mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right] - |x|^2 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\eta t}-1}{\eta} C_\gamma.$$

On en déduit alors :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \frac{1-\mathrm{e}^{-\eta t}}{\eta} C_\gamma \leqslant |x|^2 + \frac{C_\gamma}{\eta}.$$

■

Remarque 3.1.7. Cette dernière proposition implique également $\sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{x,\gamma}\right|\right] \leqslant C'_\gamma\left(1+|x|\right)$, pour une certaine constante C'_γ ne dépendant que de la norme uniforme de γ.

3.1.4 Mesure invariante associée à l'EDS

Théorème 3.1.8

On se place dans le cadre de l'hypothèse 3.1.1.
Dans ce cas, l'EDS (3.1.1) admet une unique mesure invariante sur $\mathbb{R}^d$, qu'on appellera μ.
De plus, μ est fortement mélangeante, ce qui signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{L}\left(X_t^x\right) \text{ converge faiblement vers } \mu \text{ quand } t \to +\infty.$$

Enfin, il existe une constante $C > 0$, telle que pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qui soit bornée et globalement Lipschitzienne, on ait :

$$\left| \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right] - \int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\mu \right| \leqslant C(1+|x|)\mathrm{e}^{-\frac{\eta t}{2}} \|\phi\|_{\mathrm{lip}}.$$

Démonstration :

Soit V un $\mathbb{R}^l$-mouvement brownien indépendant de W, on pose $\overline{W}_t = \begin{cases} W_t & \text{si } t \geqslant 0 \\ V_{-t} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$ et on considère l'EDS (pour $t \geqslant s$) :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{s,x} = F\left(X_t^{s,x}\right)\mathrm{d}t + G\mathrm{d}\overline{W}_t \\ X_s^{s,x} = x \end{cases}$$

Cette EDS admet une unique solution forte et d'après la proposition 3.1.5,

$$\exists C > 0,\ \forall t \geqslant 0,\ \mathbb{E}\left[\left|X_t^{0,x}\right|^2\right] \leqslant C\left(1+|x|^2\right).$$

En utilisant le fait que $X_t^{u,x} \overset{\mathcal{L}}{=} X_{t+u}^{0,x}$ et la majoration de la proposition 3.1.4, on peut alors montrer que pour $t > -\lambda > -\gamma$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{-\lambda,x} - X_t^{-\gamma,x}\right|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-2\eta(t+\lambda)}C'\left(1+|x|^2\right).$$

Ainsi, si $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\left(X_t^{\gamma_n,x}\right)_n$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ donc converge vers une variable aléatoire ρ_t^x.
En utilisant la proposition 3.1.4, on montre que :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{0,x_1} - X_t^{0,x_2}\right|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-2\eta(t+\gamma_n)}\left|x_1 - x_2\right|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, on a montré que $\rho_t^{x_1} = \rho_t^{x_2}$ $\mathbb{P}$-p.s. et donc ρ_t ne dépend pas de x.
On peut aussi montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_{t_1}^{-\gamma_n,x} - X_{t_2}^{-\gamma_n,x}\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|X_{t_1+\gamma_n}^{0,x} - X_{t_1+\gamma_n}^{0,X_{t_2-t_1}^{0,x}}\right|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-2\eta(t_1+\gamma_n)}C'\left(1+|x|^2\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\rho_{t_1} = \rho_{t_2}$ $\mathbb{P}$-p.s. et ρ ne dépend pas de t, donc $\mu = \mathcal{L}(\rho)$ est une mesure invariante.
Par le théorème 7.2.1 de [DZ96], le semi-groupe associé à X (voir la définition 3.3.10) est régulier en tout temps $t > 0$.
Par le théorème de Doob, (qui porte le numéro 4.2.1 dans [DZ96]), μ est l'unique mesure invariante et est fortement mélangeante.
Ainsi, par passage à la limite (de s vers l'infini) dans

$$\left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right) - \phi\left(X_s^x\right)\right]\right| \leqslant \|\phi\|_{\mathrm{lip}}\mathbb{E}\left[\left|X_t^x - X_s^x\right|\right] \leqslant \|\phi\|_{\mathrm{lip}}\mathrm{e}^{-\eta t}C\left(1+|x|\right),$$

on obtient le résultat. ∎

3.2 Une EDSR ergodique (EDSRE)

On s'intéresse dans cette section aux EDSR (dites ergodiques) de la forme suivante.

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^x\right) - \lambda\right) \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^x \,.\, \mathrm{d}W_\sigma, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{3.2.8}$$

Dans ce contexte, X^x est le processus défini comme solution de (3.1.1) dans la section précédente et ψ une fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les inconnues de cette équation sont les processus Y^x et Z^x à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^l$ respectivement, ainsi que la constante réelle λ. Cette équation doit être vérifiée pour tous les couples (t, T) de réels vérifiant $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$ (on parle d'horizon infini).

Hypothèse 3.2.1

La fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$
- est globalement lipschitzienne :

$$\exists K_x, K_z > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \forall z, z' \in \mathbb{R}^l,\ \left|\psi\left(x, z\right) - \psi\left(x', z'\right)\right| \leqslant K_x \left|x - x'\right| + K_z \left|z - z'\right|;$$

- est telle que $\psi(\bullet, 0)$ soit bornée ; on note $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} |\psi(x, 0)|$.

3.2.1 Résolution d'une EDSR auxiliaire

On commence par s'intéresser à l'EDSR (non-ergodique) à horizon infini suivante, faisant intervenir un nouveau paramètre $\alpha > 0$.

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_\sigma^{x,\alpha}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^{x,\alpha} \,.\, \mathrm{d}W_\sigma, \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{3.2.9}$$

Théorème 3.2.2

On se place sous les hypothèses 3.1.1 et 3.2.1.
Dans ce cas, l'équation (3.2.9) admet une unique solution $\left(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha}\right)$ telle que $Y^{x,\alpha}$ soit un processus continu borné et $Z^{x,\alpha}$ soit un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0, \infty; \mathbb{R}^l\right)\right)$.
De plus, on a la majoration suivante :

$$\forall t \geqslant 0,\ |Y_t^{x,\alpha}| \leqslant \frac{M}{\alpha} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Démonstration :

Il s'agit ici de simplifier quelque peu la démonstration plus générale du théorème 2.1 de [Roy04] pour l'adapter à notre cadre.

Unicité : Soient $\left(Y^1, Z^1\right)$ et $\left(Y^2, Z^2\right)$ deux solutions de (3.2.9) ayant les régularités voulues ; on pose $\widehat{Y} = Y^1 - Y^2$ et $\widehat{Z} = Z^1 - Z^2$. De ce façon, $\widehat{Y}$ est un processus borné (disons par M').
On pose, pour $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\beta_t = \begin{cases} \frac{\psi\left(X_t^x, Z_t^1\right) - \psi\left(X_t^x, Z_t^2\right)}{\left|\widehat{Z}_t\right|^2} \widehat{Z}_t & \text{si } Z_t^1 \neq Z_t^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on remarque que β est un processus borné par K_z.
Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $T \geqslant t$.
On a

$$\mathrm{d}\widehat{Y}_t = \alpha \widehat{Y}_t \,\mathrm{d}t - \left[\psi\left(X_t^x, Z_t^1\right) - \psi\left(X_t^x, Z_t^2\right)\right] \mathrm{d}t + \widehat{Z}_t \,.\, \mathrm{d}W_t.$$

En utilisant la formule de Tanaka (on note L le temps local associé à la semi-martingale $\widehat{Y}$), il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left|\widehat{Y}_t\right| &= \frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\alpha\widehat{Y}_t\,\mathrm{d}t - \frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\left[\psi\left(X_t^x, Z_t^1\right) - \psi\left(X_t^x, Z_t^2\right)\right]\,\mathrm{d}t + \frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\widehat{Z}_t\,.\,\mathrm{d}W_t + \mathrm{d}L_t^0 \\ &= \alpha\left|\widehat{Y}_t\right|\,\mathrm{d}t + \frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\widehat{Z}_t\,.\,(\mathrm{d}W_t - \beta_t\,\mathrm{d}t) + \mathrm{d}L_t^0.\end{aligned}$$

Comme β est borné, par le théorème de Girsanov, il existe une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s\,\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien.
Ainsi

$$\mathrm{d}\left|\widehat{Y}_t\right| = \alpha\left|\widehat{Y}_t\right|\,\mathrm{d}t + \frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\widehat{Z}_t\,.\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t + \mathrm{d}L_t^0.$$

Comme précédemment, on considère

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\left|\widehat{Y}_t\right|\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\widehat{Y}_t}{\left|\widehat{Y}_t\right|}\widehat{Z}_t\,.\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t + \mathrm{d}L_t^0\right).$$

En intégrant, puis en prenant l'espérance sous la loi $\widetilde{\mathbb{P}}$, conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, on obtient :

$$\mathrm{e}^{-\alpha T}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\widehat{Y}_T\right|\right] - \mathrm{e}^{-\alpha t}\left|\widehat{Y}_t\right| = 0 + \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}L_s^0\right].$$

D'où l'on déduit, en utilisant le fait que le temps local est un processus croissant :

$$\left|\widehat{Y}_t\right| = \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\widehat{Y}_T\right|\right] - \mathrm{e}^{\alpha t}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha_s}\,\mathrm{d}L_s^0\right] \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\widehat{Y}_T\right|\right] \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}M' \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, on a montré que $\forall t \geqslant 0$, $\left(Y_t^1 = Y_t^2\ \mathbb{P}\text{-p.s.}\right)$; la continuité de Y^1 et Y^2 permet d'en déduire que $Y^1 = Y^2$ $\mathbb{P}$-p.s.
Par une formule d'Itô, on montre que, pour tout $T > 0$, $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widehat{Z}_t\right|^2\,\mathrm{d}t\right] = 0$, d'où l'égalité de Z^1 et Z^2 dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^l\right)\right)$.

Existence :

(i) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit (Y^n, Z^n) comme l'unique solution de l'EDSR à horizon fini

$$Y_t^n = \int_{t\wedge n}^n \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right)\,\mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n Z_\sigma^n\,.\,\mathrm{d}W_\sigma, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{3.2.10}$$

Voir, par exemple, le théorème 2.1 de [EPQ97].

(ii) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la majoration $\left|Y_t^{x,\alpha}\right| \leqslant \frac{M}{\alpha}$ $\mathbb{P}$-p.s.
On va utiliser les mêmes outils que pour l'unicité.
On pose, pour $t \geqslant 0$,

$$\beta_t^n = \begin{cases} \frac{\psi(X_t^x, Z_t^n) - \psi(X_t^x, 0)}{\left|Z_t^n\right|^2} Z_t^n & \text{si } Z_t^n \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a, pour $t \geqslant 0$ et $n \geqslant t$,

$$\mathrm{d}Y_t^n = -\left[\psi\left(X_t^x, Z_t^n\right) - \alpha Y_t^n\right]\,\mathrm{d}t + Z_t^n\,.\,\mathrm{d}W_t = \alpha Y_t^n\,\mathrm{d}t - Z_t^n\,.\,\beta_t^n\,\mathrm{d}t - \psi\left(X_t^x, 0\right)\,\mathrm{d}t + Z_t^n\,.\,\mathrm{d}W_t.$$

Par Tanaka, on en déduit

$$\mathrm{d}\left|Y_t^n\right| = \alpha\left|Y_t^n\right|\,\mathrm{d}t - \frac{Y_t^n}{\left|Y_t^n\right|}\psi\left(X_t^x, 0\right)\,\mathrm{d}t + \frac{Y_t^n}{\left|Y_t^n\right|}Z_t^n\,.\,\mathrm{d}W_t^n + \mathrm{d}L_t^{n,0},$$

où $W_t^n = W_t - \int_0^t \beta_s^n \, \mathrm{d}s$ est un mouvement brownien sous une certaine mesure de probabilité $\mathbb{P}_n$ (car le processus β^n est borné) et où $L^{n,0}$ désigne le temps local de Y^n en 0.
Puis

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\left|Y_t^n\right|\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(-\frac{Y_t^n}{|Y_t^n|}\psi\left(X_t^x, 0\right)\, \mathrm{d}t + \frac{Y_t^n}{|Y_t^n|}Z_t^n \,.\, \mathrm{d}W_t^n + \mathrm{d}L_t^{n,0}\right);$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left|Y_t^n\right| &= \mathbb{E}_n^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\frac{Y_s^n}{|Y_s^n|}\psi\left(X_s^x, 0\right)\, \mathrm{d}s\right] - \mathbb{E}_n^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\, \mathrm{d}L_s^{n,0}\right]\\ &\leqslant M\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\, \mathrm{d}s = \frac{M}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha n}\right).\end{aligned}$$

Et finalement, $\left|Y_t^n\right| \leqslant \frac{M}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha(n-t)}\right) \leqslant \frac{M}{\alpha}$.

(iii) Pour montrer que (Y^n) converge, on va montrer que c'est une suite de Cauchy. Gardant la même idée en tête, on pose, pour $n \leqslant m$:

$$\beta_t^{n,m} = \begin{cases} \frac{\psi(X_t^x, Z_t^n) - \psi(X_t^x, Z_t^m)}{\left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2}\left(Z_t^n - Z_t^m\right) & \text{si } Z_t^n \neq Z_t^m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\mathrm{d}\left(Y_t^n - Y_t^m\right) = \alpha\left(Y_t^n - Y_t^m\right)\, \mathrm{d}t + \left(Z_t^n - Z_t^m\right).\left(\mathrm{d}W_t - \beta_t^{n,m}\, \mathrm{d}t\right).$$

Comme précédemment, on montre en utilisant le théorème de Girsanov que

$$\mathrm{e}^{-\alpha n}\mathbb{E}_{n,m}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|Y_n^m\right|\right] - \mathrm{e}^{-\alpha t}\left|Y_t^n - Y_t^m\right| \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, et pour tous $n \leqslant m \in \mathbb{N}$,

$$\left|Y_t^n - Y_t^m\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(n-t)}\frac{M}{\alpha}.$$

Donc, pour tout $t \geqslant 0$, la suite $\left(Y_t^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente ; on note Y_t sa limite. De plus, en faisant le passage à la limite $m \to +\infty$, on montre que

$$\left|Y_t^n - Y_t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(n-t)}\frac{M}{\alpha}, \tag{3.2.11}$$

ce qui signifie que la convergence de Y^n vers Y est uniforme ; ainsi Y est continu et est également borné par $\frac{M}{\alpha}$.

(iv) Montrons que, pour tout $T > 0$, la suite (Z^n) est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^l\right)\right)$, qui est un espace complet.
Soient $n \leqslant m \in \mathbb{N}$; par la formule d'Itô, partant de $\mathrm{d}\left(Y_t^n - Y_t^m\right)$, quantité calculée au point précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha t}\left(Y_t^n - Y_t^m\right)^2\right)\\ &\quad= \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left[-2\left(Y_t^n - Y_t^m\right)\left(Z_t^n - Z_t^m\right).\beta_t^{n,m}\, \mathrm{d}t + 2\left(Y_t^n - Y_t^m\right)\left(Z_t^n - Z_t^m\right).\mathrm{d}W_t + \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2\, \mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

D'où, en intégrant, puis en prenant l'espérance :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha(m\wedge T)}\left(Y_{m\wedge T}^n - Y_{m\wedge T}^m\right)^2 - \left(Y_0^n - Y_0^m\right)^2\right]\\ &\qquad= -2\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\left(Y_t^n - Y_t^m\right)\left(Z_t^n - Z_t^m\right).\beta_t^{n,m}\, \mathrm{d}t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2\, \mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

On en déduit alors les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \mathrm{e}^{-2\alpha t} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] \\
&\quad = 2\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \mathrm{e}^{-2\alpha t} \left(Y_t^n - Y_t^m\right)\left(Z_t^n - Z_t^m\right).\beta_t^{n,m} \, \mathrm{d}t\right] + \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha(m\wedge T)} \left(Y_{m\wedge T}^n - Y_{m\wedge T}^m\right)^2 - \left(Y_0^n - Y_0^m\right)^2\right] \\
&\quad \leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{e}^{-\alpha(n-t)} \frac{M}{\alpha} \left|Z_t^n - Z_t^m\right| K_z \, \mathrm{d}t\right] + \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-2\alpha(m\wedge T)}\mathrm{e}^{-2\alpha(n-m\wedge T)} \frac{M^2}{\alpha^2}\right] \\
&\quad \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \frac{2MK_z}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha n}\mathrm{e}^{-\alpha t} \left|Z_t^n - Z_t^m\right| \, \mathrm{d}t\right] + \frac{M^2}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-2\alpha n} \\
&\quad \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \left(\frac{2M^2K_z^2}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-2\alpha n} + \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha t}}{2} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2\right) \mathrm{d}t\right] + \frac{M^2}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-2\alpha n} \\
&\quad \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \mathrm{e}^{-2\alpha t} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] + \frac{M^2}{\alpha^2}\left(2K_z^2(m\wedge T) + 1\right)\mathrm{e}^{-2\alpha n}
\end{aligned}$$

Ainsi il en découle $\mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \mathrm{e}^{-2\alpha t} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] \leqslant 2\frac{M^2}{\alpha^2}\left(2K_z^2(m\wedge T) + 1\right)\mathrm{e}^{-2\alpha n}$, d'où

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{T} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{m\wedge T} \left|Z_t^n - Z_t^m\right|^2 \, \mathrm{d}t\right] \leqslant 2\frac{M^2}{\alpha^2}\left(2K_z^2(m\wedge T) + 1\right)\mathrm{e}^{-2\alpha(n-m\wedge T)} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc bien définit un processus Z comme la limite des processus Z^n.

(v) Par définition de (Y^n, Z^n), on a :

$$Y_t^n - Y_T^n = \int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma^n . \mathrm{d}W_\sigma.$$

On a vu que le membre de gauche converge presque sûrement vers $Y_t - Y_T$ et est borné : la convergence a donc lieu dans L^1.
Aussi, on a :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma - \int_t^T \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma\right| \\
&\quad \leqslant \left|\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma\right| + \left|\int_{t\wedge n}^{t} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma\right| \\
&\qquad + \left|\int_{T\wedge n}^{T} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma\right| \\
&\quad \leqslant \int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(K_z\left|Z_\sigma^n - Z_\sigma\right| + \alpha\left|Y_\sigma^n - Y_\sigma\right|\right) \mathrm{d}\sigma + \int_{t\wedge n}^{t} \left(M + K_z\left|Z_\sigma\right| + \alpha\left|Y_\sigma\right|\right) \mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_{T\wedge n}^{T} \left(M + K_z\left|Z_\sigma\right| + \alpha\left|Y_\sigma\right|\right) \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Puis, en prenant l'espérance de cette quantité, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma - \int_t^T \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma\right|\right] \\
&\quad \leqslant K_z\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left|Z_\sigma^n - Z_\sigma\right| \mathrm{d}\sigma\right] + M\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \mathrm{e}^{-\alpha(n-\sigma)} \mathrm{d}\sigma + \mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{t} \left(2M + K_z\left|Z_\sigma\right|\right) \mathrm{d}\sigma\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\int_{T\wedge n}^{T} \left(2M + K_z\left|Z_\sigma\right|\right) \mathrm{d}\sigma\right] \\
&\quad \leqslant K_z\sqrt{T-t}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left|Z_\sigma^n - Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right]} + M\frac{\mathrm{e}^{\alpha(T\wedge n-n)} - \mathrm{e}^{\alpha(t\wedge n-n)}}{\alpha} + 2M(t - t\wedge n) \\
&\qquad + K_z\sqrt{t - t\wedge n}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{t} \left|Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right]} + 2M(T - T\wedge n) + K_z\sqrt{T - T\wedge n}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_{T\wedge n}^{T} \left|Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right]}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve alors que $\displaystyle\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \int_t^T \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma\right) - \alpha Y_\sigma\right) \mathrm{d}\sigma$.

Enfin, un dernier calcul permet de montrer que $\displaystyle\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma^n \,.\, \mathrm{d}W_\sigma \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2} \int_t^T Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma^n \,.\, \mathrm{d}W_\sigma - \int_t^T Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma\right)^2\right] \\
&\quad \leqslant 2\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma^n \,.\, \mathrm{d}W_\sigma - \int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma - \int_t^T Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma\right)^2\right] \\
&\quad \leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left|Z_\sigma^n - Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] + 4\mathbb{E}\left[\left(\int_{t\wedge n}^{t} Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma\right)^2\right] + 4\mathbb{E}\left[\left(\int_{T\wedge n}^{T} Z_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma\right)^2\right] \\
&\quad \leqslant 2\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{T\wedge n} \left|Z_\sigma^n - Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_{t\wedge n}^{t} \left|Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_{T\wedge n}^{T} \left|Z_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right].
\end{aligned}$$

■

On définit, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $v^\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Y_0^{x,\alpha} \end{array}\right.$; d'après le lemme précédent, cette fonction est bornée par $\dfrac{M}{\alpha}$.

Lemme 3.2.3

Sous les hypothèses 3.1.1 et 3.2.1, les fonctions v^α sont uniformément globalement lipschitziennes ; plus précisément, on a :

$$\forall \alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta}\left|x - x'\right|.$$

Démonstration :

Soit $\alpha > 0$, soient $x, x' \in \mathbb{R}^d$; on pose $\widetilde{Y} = Y^{x,\alpha} - Y^{x',\alpha}$ et $\widetilde{Z} = Z^{x,\alpha} - Z^{x',\alpha}$.

Aussi, on définit les processus :

$$\beta_t = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x',\alpha}\right) - \psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x,\alpha}\right)}{\left|\widetilde{Z}_t\right|^2} \widetilde{Z}_t & \text{si } \widetilde{Z}_t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. ;$$

$$f_t = \psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right) - \psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x,\alpha}\right).$$

On remarque que β est un processus adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^l$ et borné par K_z (d'après l'hypothèse 3.2.1). Ainsi, d'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\widetilde{W}_t = W_t + \displaystyle\int_0^t \beta_s \,\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien.

On a, pour tous $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t &= Y_T^{x,\alpha} - Y_T^{x',\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_\sigma^{x,\alpha} - \psi\left(X_\sigma^{x'}, Z_\sigma^{x',\alpha}\right) + \alpha Y_\sigma^{x',\alpha}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T \left(Z_\sigma^{x,\alpha} - Z_\sigma^{x',\alpha}\right) . \mathrm{d}W_\sigma \\
&= \widetilde{Y}_T - \alpha \int_t^T \widetilde{Y}_\sigma \,\mathrm{d}\sigma + \int_t^T f_\sigma \,\mathrm{d}\sigma - \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^{x'}, Z_\sigma^{x',\alpha}\right) - \psi\left(X_\sigma^{x'}, Z_\sigma^{x,\alpha}\right)\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T \widetilde{Z}_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma \\
&= \widetilde{Y}_T - \alpha \int_t^T \widetilde{Y}_\sigma \,\mathrm{d}\sigma + \int_t^T f_\sigma \,\mathrm{d}\sigma - \int_t^T \widetilde{Z}_\sigma \,.\, \mathrm{d}\widetilde{W}_\sigma.
\end{aligned}$$

Il en découle $\mathrm{d}\widetilde{Y}_t = \alpha \widetilde{Y}_t \,\mathrm{d}t - f_t \,\mathrm{d}t + \widetilde{Z}_t \,.\, \mathrm{d}\widetilde{W}_t$, puis :

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t}\widetilde{Y}_t\right) = -\mathrm{e}^{-\alpha t} f_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\alpha t}\widetilde{Z}_t \,.\, \mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

On intègre entre t et T, on prend l'espérance conditionnelle sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ sachant $\mathcal{F}_t$ et on obtient :

$$\mathrm{e}^{-\alpha T}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\widetilde{Y}_T\right] - \mathrm{e}^{-\alpha t}\widetilde{Y}_t = -\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha s} f_s \,\mathrm{d}s\right],$$

en utilisant le fait que $\int_t^T \widetilde{Z}_\sigma \,.\, \mathrm{d}\widetilde{W}_\sigma$ est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_t$ et centrée sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, car $\widetilde{Z}$ est de carré intégrable.
En réarrangeant, ceci fournit :

$$\widetilde{Y}_t = \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\widetilde{Y}_T\right] + \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha(s-t)} f_s \,\mathrm{d}s\right].$$

Ainsi, on obtient la majoration

$$\left|\widetilde{Y}_t\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\left|\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\widetilde{Y}_T\right]\right| + \left|\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha(s-t)} f_s \,\mathrm{d}s\right]\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\widetilde{Y}_T\right|\right] + \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha(s-t)} \left|f_s\right| \,\mathrm{d}s\right].$$

Mais on sait que $\widetilde{Y}$ est borné par $\dfrac{2M}{\alpha}$; et, d'après la proposition 3.1.4, le processus f vérifie, pour tout $t \geqslant 0$, $|f_t| \leqslant K_x \left|X_t^x - X_t^{x'}\right| \leqslant K_x\, \mathrm{e}^{-\eta t}\,|x - x'|$.
Ainsi, pour tout $\alpha > 0$ et pour tous $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{Y}_t\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\frac{2M}{\alpha} + \int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha(s-t)} K_x \mathrm{e}^{-\eta s}\left|x - x'\right| \,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha(T-t)}\frac{2M}{\alpha} + K_x\left|x - x'\right| \mathrm{e}^{\alpha t}\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta)T} - \mathrm{e}^{-(\alpha+\eta)t}}{-(\alpha+\eta)} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} K_x\left|x - x'\right| \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}}{\alpha+\eta}.\end{aligned}$$

En conséquence, $\left|\widetilde{Y}_0\right| \leqslant \dfrac{K_x}{\eta}\,|x - x'|$. ■

Le résultat suivant est tiré de l'appendice de [Roy04].

Proposition 3.2.4

On a la relation :

$$\forall t \geqslant 0,\ Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha\left(X_t^x\right) \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Démonstration :

On renvoie aux équations (3.1.2) et (3.1.3) pour la définition des processus $\widetilde{X}^x$ et $X^{v,\theta}$, où $x \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_v; \mathbb{R}^d\right)$.
On note $\left(Y^{v,\theta}, Z^{v,\theta}\right)$ l'unique solution de l'EDSR à horizon infini :

$$Y_t^{v,\theta} = Y_T^{v,\theta} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^{v,\theta}, Z_s^{v,\theta}\right) - \alpha Y_s^{v,\theta}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{v,\theta} \,.\, \mathrm{d}W_s. \tag{3.2.12}$$

De même, on définit de manière unique deux processus $\widetilde{Y}^x$ et $\widetilde{Z}^x$ par :

$$\widetilde{Y}_t^x = \widetilde{Y}_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(\widetilde{X}_s^x, \widetilde{Z}_s^x\right) - \alpha \widetilde{Y}_s^x\right] \mathrm{d}s - \int_t^T \widetilde{Z}_s^x \,.\, \mathrm{d}B_s, \tag{3.2.13}$$

où on rappelle que $B_t = W_{t+v} - W_v$.
On définit alors $\widetilde{v}^\alpha : x \mapsto \widetilde{Y}_0^x$.
On considère également les EDSR à horizon fini (3.2.10) et (3.2.14) :

$$\widetilde{Y}_t^{n,x} = \int_{t\wedge n}^n \left[\psi\left(\widetilde{X}_s^x, \widetilde{Z}_s^{n,x}\right) - \alpha \widetilde{Y}_s^{n,x}\right] \mathrm{d}s - \int_{t\wedge n}^n \widetilde{Z}_s^{n,x} \,.\, \mathrm{d}B_s. \tag{3.2.14}$$

Par unicité faible, et comme $X^x \overset{\mathcal{L}}{=} \widetilde{X}^x$, on a : $\left(\widetilde{Y}^{n,x}, \widetilde{Z}^{n,x}\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \left(Y^{n,x}, Z^{n,x}\right)$. En particulier, au temps $t = 0$, on obtient $\left(\widetilde{Y}_0^{n,x}, \widetilde{Z}_0^{n,x}\right) = \left(Y_0^{n,x}, Z_0^{n,x}\right)$ $\mathbb{P}$-p.s.
Par passage à la limite, ceci fournit : $v^\alpha(x) = \widetilde{v}^\alpha(x)$.
Pour $\theta = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{1}_{A_i}$ (où les ensembles A_i forment une partition $\mathcal{F}_v$-mesurable de Ω) une variable aléatoire étagée, on pose :

$$v^\alpha(\theta) = \sum_{i=1}^m v^\alpha\left(x_i\right) \mathbb{1}_{A_i} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{v}^\alpha(\theta) = \sum_{i=1}^m \widetilde{v}^\alpha\left(x_i\right) \mathbb{1}_{A_i}.$$

Ainsi, $v^\alpha(\theta) = \widetilde{v}^\alpha(\theta)$.
Pour $\theta \in \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_v; \mathbb{R}^d\right)$, il existe une suite $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires étagées qui tende vers θ dans L^2 ; ainsi, θ est limite presque-sûre d'une suite extraite. La continuité de v^α et $\widetilde{v}^\alpha$ (qui découle du fait qu'elles soient globalement lipschitziennes, d'après le lemme 3.2.3) implique, par passage à la limite : $v^\alpha(\theta) = \widetilde{v}^\alpha(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_v; \mathbb{R}^d\right)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_t^x &= \widetilde{Y}_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(\widetilde{X}_s^x, \widetilde{Z}_s^x\right) - \alpha \widetilde{Y}_s^x\right] \mathrm{d}s - \int_t^T \widetilde{Z}_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s \\
&= \widetilde{Y}_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(X_{s+v}^{v,x}, \widetilde{Z}_s^x\right) - \alpha \widetilde{Y}_s^x\right] \mathrm{d}s - \int_t^T \widetilde{Z}_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s \\
Y_{t+v}^{v,x} &= Y_{T+v}^{v,x} + \int_{t+v}^{T+v} \left[\psi\left(X_s^{v,x}, Z_s^{v,x}\right) - \alpha Y_s^{v,x}\right] \mathrm{d}s - \int_{t+v}^{T+v} Z_s^{v,x} \,.\, \mathrm{d}W_s \\
&= Y_{T+v}^{v,x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_{s+v}^{v,x}, Z_{s+v}^{v,x}\right) - \alpha Y_{s+v}^{v,x}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_{s+v}^{v,x} \,.\, \mathrm{d}B_s
\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\left(Y_{t+v}^{v,x}, Z_{t+v}^{v,x}\right)_{t\geqslant 0} \overset{\mathcal{L}}{=} \left(\widetilde{Y}_t^x, \widetilde{Z}_t^x\right)_{t\geqslant 0}$, et, plus particulièrement, $Y_v^{v,x} = \widetilde{Y}_0^x$.
Pour $\theta = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{1}_{A_i}$, on a $\widetilde{v}^\alpha(\theta) = \sum_{i=1}^m Y_v^{v,x_i}\mathbb{1}_{A_i}$. On veut montrer que cette quantité est aussi égale à $Y_v^{v,\theta}$.
Montrons-le pour X :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m X_t^{v,x_i}\mathbb{1}_{A_i} &= \sum_{i=1}^m \left(x_i + \int_v^t F\left(X_s^{v,x_i}\right) \mathrm{d}s + G\left(W_t - W_v\right)\right)\mathbb{1}_{A_i} = \theta + \int_t^T \sum_{i=1}^m F\left(X_s^{v,x_i}\right)\mathbb{1}_{A_i}\, \mathrm{d}s + G\left(W_t - W_v\right) \\
&= \theta + \int_t^T F\left(\sum_{i=1}^m X_s^{v,x_i}\mathbb{1}_{A_i}\right) \mathrm{d}s + G\left(W_t - W_v\right)
\end{aligned}$$

Par unicité forte pour l'EDS (3.1.1), il vient $X_t^{v,\theta} = \sum_{i=1}^m X_s^{v,x_i}\mathbb{1}_{A_i}$. On opère similairement pour montrer que $\widetilde{v}^\alpha(\theta) = Y_v^{v,\theta}$, d'abord pour toute variable aléatoire étagée θ, puis, par un argument de densité, pour tout $\theta \in \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_v; \mathbb{R}^d\right)$ (on utilise ici la continuité de l'application $\widetilde{v}^\alpha$).
On sait que X vérifie la propriété de Markov, c'est-à-dire : $X_s^{r, X_r^{v,x}} = X_s^{v,x}$ $\mathbb{P}$-p.s.
Ainsi, on a :

$$Y_t^{v,X_v^x} = Y_T^{v,X_v^x} + \int_t^T \left[\psi\left(X_s^x, Z_s^{v,X_v^x}\right) - \alpha Y_s^{v,X_v^x}\right] \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{v,X_v^x} \,.\, \mathrm{d}W_s.$$

Par unicité forte des solutions de l'EDSR, on a donc en particulier $Y_t^{v,X_v^x} = Y_t^x$ $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $t \geqslant 0$.
Finalement, comme $X_v^x \in \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}_v; \mathbb{R}^d\right)$ on a montré que :

$$v^\alpha\left(X_v^x\right) = \widetilde{v}^\alpha\left(X_v^x\right) = Y_v^{v,X_v^x} = Y_v^x.$$

■

3.2.2 Résolution de l'EDSRE (3.2.8)

Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\overline{v}^\alpha(x) = v^\alpha(x) - v^\alpha(0)$. D'après le lemme 3.2.3, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall \alpha > 0,\ |\overline{v}^\alpha(x)| \leqslant \frac{K_x}{\eta}|x|.$$

Aussi, le théorème 3.2.2 fournit l'inégalité

$$\forall \alpha > 0,\ \alpha\,|v^\alpha(0)| \leqslant M.$$

Par extraction diagonale, on peut extraire une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, tendant vers 0, et telle que pour tout x dans une partie dénombrable D de $\mathbb{R}^d$ — par exemple, on peut prendre $D = \mathbb{Q}^d$ —, on ait :

$$\overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x) \ \text{ et } \ \alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}, \tag{3.2.15}$$

pour une certaine fonction $\overline{v} : D \to \mathbb{R}$ et un certain réel $\overline{\lambda}$.

De plus, par le lemme 3.2.3, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\, \left|\overline{v}^{\alpha_n}(x) - \overline{v}^{\alpha_n}\left(x'\right)\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta}\left|x - x'\right|.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $\overline{v}$ est uniformément continue sur D, donc $\overline{v}$ se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. On a même

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\, \left|\overline{v}(x) - \overline{v}(x')\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta}\left|x - x'\right| \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\, \overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x).$$

On fixe désormais les notations $\overline{\lambda}$ et $\overline{v}$ pour ces objets définis en (3.2.15) à partir de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarque que $\overline{v}(0) = 0$.

Théorème 3.2.5

On se place dans le cadre des hypothèses 3.1.1 et 3.2.1.
On définit un processus $\overline{Y}^x$ par la relation $\overline{Y}_t^x = \overline{v}\left(X_t^x\right)$, pour tout $t \geqslant 0$.
Ainsi, il existe un processus $\overline{Z}^x \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0, \infty; \mathbb{R}^l\right)\right)$ tel que l'EDSRE (3.2.8) soit $\mathbb{P}$-p.s. satisfaite par le triplet $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$.
De plus, il existe une fonction mesurable $\overline{\zeta} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^l$, telle que $\overline{Z}_t^x = \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration :

→ On pose $\overline{Y}_t^{x,\alpha} = Y_t^{x,\alpha} - v^\alpha(0) = \overline{v}^\alpha\left(X_t^x\right)$.
Comme $Y^{x,\alpha}$ est solution de l'EDSR (3.2.9), on a, pour tous $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$,

$$\overline{Y}_t^{x,\alpha} = \overline{Y}_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{x,\alpha}\right) - \alpha\overline{Y}_\sigma^{x,\alpha} - \alpha v^\alpha(0)\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^{x,\alpha} \,.\, \mathrm{d}W_\sigma.$$

Mais comme $\overline{Y}_t^{x,\alpha} = \overline{v}^\alpha\left(X_t^x\right)$, on a la majoration $\left|\overline{Y}_t^{x,\alpha}\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta}\left|X_t^x\right|$.
D'après la proposition 3.1.5, on a :

$$\forall T > 0,\, \forall p \geqslant 1,\, \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^x\right|^p\right] \leqslant C_{p,T}\left(1 + |x|^p\right).$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \sup_{\alpha>0} \left|Y_t^{x,\alpha}\right|^2\right] \leqslant \frac{K_x^2}{\eta^2} C_{2,T}\left(1 + |x|^2\right) < \infty.$$

Comme les constantes sont intégrables contre $\mathrm{d}\mathbb{P}$ et $\mathrm{d}\mathbb{P} \otimes \mathrm{d}t$ sur Ω et $\Omega \times [0, T]$, et comme en plus $\overline{Y}_t^{x,\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} \overline{Y}_t^x$ pour tout $t \in [0, T]$, on a, par convergence dominée :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\overline{Y}_t^{x,\alpha_n} - \overline{Y}_t^x\right|^2 \mathrm{d}t\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_T^{x,\alpha_n} - \overline{Y}_T^x\right|^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

→ Notre objectif va désormais être de montrer qu'il existe un processus $\overline{Z}^x \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left(0, \infty; \mathbb{R}^l\right)\right)$ tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t^{x,\alpha_n} - \overline{Z}_t^x\right|^2 \mathrm{d}t\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soient $n \leqslant m \in \mathbb{N}$; on pose $\widetilde{Y} = \overline{Y}^{x,\alpha_n} - \overline{Y}^{x,\alpha_m}$ et $\widetilde{Z} = Z^{x,\alpha_n} - Z^{x,\alpha_m}$.
On a :

$$\mathrm{d}\widetilde{Y}_t = -\underbrace{\left(\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha_n}\right) - \psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha_m}\right)\right)}_{=\widetilde{\psi}_t} \mathrm{d}t + \left(\alpha_n Y_t^{x,\alpha_n} - \alpha_m Y_t^{x,\alpha_m}\right) \mathrm{d}t + \widetilde{Z}_t \,.\, \mathrm{d}W_t.$$

Comme on l'a déjà fait précédemment, on utilise alors la formule d'Itô, on intègre par rapport au temps, puis on prend l'espérance. On obtient alors :

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_T^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \widetilde{Y}_t \widetilde{\psi}_t \,\mathrm{d}t\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\alpha_n Y_t^{x,\alpha_n} - \alpha_m Y_t^{x,\alpha_m}\right) \widetilde{Y}_t \,\mathrm{d}t\right] = \widetilde{Y}_0^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Z}_t\right|^2 \,\mathrm{d}t\right].$$

Mais on rappelle que $\left|\widetilde{\psi}_t\right| \leqslant K_z \left|\widetilde{Z}_t\right|$ et $\alpha_n \left|Y_t^{x,\alpha_n}\right| \leqslant M$.
Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Z}_t\right|^2 \,\mathrm{d}t\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_T^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \widetilde{Y}_t \widetilde{\psi}_t \,\mathrm{d}t\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\alpha_n Y_t^{x,\alpha_n} - \alpha_m Y_t^{x,\alpha_m}\right) \widetilde{Y}_t \,\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_T^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_t\right| \left|\widetilde{\psi}_t\right| \,\mathrm{d}t\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\left|\alpha_n Y_t^{x,\alpha_n}\right| + \left|\alpha_m Y_t^{x,\alpha_m}\right|\right) \left|\widetilde{Y}_t\right| \,\mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_T^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T K_z \left|\widetilde{Y}_t\right| \left|\widetilde{Z}_t\right| \,\mathrm{d}t\right] + 4M\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_t\right| \,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

Utilisant notamment le fait que $K_z \left|\widetilde{Y}_t\right| \left|\widetilde{Z}_t\right| \leqslant \dfrac{K_z^2}{2} \left|\widetilde{Y}_t^2\right| + \dfrac{1}{2} \left|\widetilde{Z}_t\right|^2$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Z}_t\right|^2 \,\mathrm{d}t\right] \leqslant 2\mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_T^2\right] + 2K_z^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_t\right|^2 \,\mathrm{d}t\right] + 8M\sqrt{T}\sqrt{\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\widetilde{Y}_t\right|^2 \,\mathrm{d}t\right]}.$$

Donc $\left(Z^{x,\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left([0,T]; \mathbb{R}^l\right)\right)$, donc elle converge.

On peut alors définir $\overline{Z}^x$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left(0,\infty; \mathbb{R}^l\right)\right)$, tel qu'on l'avait annoncé.

→ Rappelons que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, on a :

$$\overline{Y}_t^{x,\alpha_n} = \overline{Y}_T^{x,\alpha_n} + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{x,\alpha_n}\right) - \alpha_n \overline{Y}_\sigma^{x,\alpha_n} - \alpha_n v^{\alpha_n}(0)\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^{x,\alpha_n} .\,\mathrm{d}W_\sigma.$$

Comme la convergence dans L^2 implique la convergence en probabilité et donc la convergence presque sûre pour une sous-suite, on obtient :

$$\overline{Y}_t^x = \overline{Y}_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, \overline{Z}_\sigma^x\right) - \overline{\lambda}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T \overline{Z}_\sigma^x .\,\mathrm{d}W_\sigma.$$

→ On veut construire $\overline{\zeta}$; on sait que pour tout $\alpha > 0$, presque partout sur $\mathbb{R}_+$, on a $Z_\bullet^{x,\alpha} = \zeta^\alpha\left(X_\bullet^x\right)$ (voir à ce sujet le théorème 4.4 de [Fuh03]).
Comme on manipule des solutions de l'EDSR (3.2.9), on a :

$$\mathrm{d}\left(Y_t^{x,\alpha} - Y_t^{x',\alpha}\right) = -\left[\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right) - \psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x',\alpha}\right)\right] \mathrm{d}t + \alpha\left(Y_t^{x,\alpha} - Y_t^{x',\alpha}\right) \mathrm{d}t + \left(Z_t^{x,\alpha} - Z_t^{x',\alpha}\right) .\,\mathrm{d}W_t.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(Y_T^{x,\alpha} - Y_T^{x',\alpha}\right)^2\right] - \left(Y_0^{x,\alpha} - Y_0^{x',\alpha}\right)^2 \\
&\quad = 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Y_t^{x,\alpha} - Y_t^{x',\alpha}\right)\left(\psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x',\alpha}\right) - \psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)\right) \mathrm{d}t\right] + 2\alpha\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(Y_t^{x,\alpha} - Y_t^{x',\alpha}\right)^2 \mathrm{d}t\right] \\
&\qquad\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t^{x,\alpha} - Z_t^{x',\alpha}\right|^2 \mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

En utilisant successivement le lemme 3.2.3 et la proposition 3.1.4, on montre que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t^{x,\alpha} - Z_t^{x',\alpha}\right|^2 \mathrm{d}t\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|v^\alpha\left(X_T^x\right) - v^\alpha\left(X_T^{x'}\right)\right|^2\right] + 2\alpha\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|v^\alpha\left(X_t^x\right) - v^\alpha\left(X_t^{x'}\right)\right|^2 \mathrm{d}t\right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|v^\alpha\left(X_t^x\right) - v^\alpha\left(X_t^{x'}\right)\right| \left|\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right) - \psi\left(X_t^{x'}, Z_t^{x',\alpha}\right)\right| \mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t^{x,\alpha}-Z_t^{x',\alpha}\right|^2 \mathrm{d}t\right] &\leqslant \frac{K_x^2}{\eta^2}\mathbb{E}\left[\left|X_T^x-X_T^{x'}\right|^2\right]+2\alpha\frac{K_x^2}{\eta^2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|X_t^x-X_t^{x'}\right|^2 \mathrm{d}t\right]\\
&\quad +2\frac{K_x}{\eta}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|X_t^x-X_t^{x'}\right|\left(K_x\left|X_t^x-X_t^{x'}\right|+K_z\left|Z_t^{x,\alpha}-Z_t^{x',\alpha}\right|\right)\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant \frac{K_x^2}{\eta^2}\mathrm{e}^{-2\eta T}|x-x'|^2+2\alpha\frac{K_x^2}{\eta^2}|x-x'|^2\int_0^T \mathrm{e}^{-2\eta t}\,\mathrm{d}t\\
&\quad +2\frac{K_x^2}{\eta}|x-x'|^2\int_0^T\mathrm{e}^{-2\eta t}\,\mathrm{d}t+\mathbb{E}\left[\int_0^T\frac{2K_xK_z}{\eta}|x-x'|\mathrm{e}^{-\eta t}\left|Z_t^{x',\alpha}-Z_t^{x,\alpha}\right|\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant C_1|x-x'|^2+\frac{2K_x^2K_z^2}{\eta^2}|x-x'|^2\int_0^T\mathrm{e}^{-2\eta t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|Z_t^{x',\alpha}-Z_t^{x,\alpha}\right|^2\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}
$$

En conséquence,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|Z_t^{x,\alpha}-Z_t^{x',\alpha}\right|^2\mathrm{d}t\right]\leqslant C|x-x'|^2.$$

Convergeant vers 0, la suite $\left(\mathbb{E}\left[\int_0^T|Z_t^{x,\alpha_n}-Z_t^{x,\alpha_m}|^2\,\mathrm{d}t\right]\right)_{n\leqslant m\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $x\in\mathbb{R}^d$.
On peut alors réaliser une extraction diagonale et construire une sous-suite (α'_n) de (α_n) telle que $\mathbb{E}\left[\int_0^T|Z_t^{x,\alpha_n}-Z_t^{x,\alpha_m}|^2\,\mathrm{d}t\right]\leqslant 2^{-n}$ pour tous $n\leqslant m\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ (en fait, d'abord pour tout x dans une partie dense, puis pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ en utilisant la continuité uniforme qu'on vient de montrer).
Ainsi, $Z_t^{x,\alpha'_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2}\overline{Z}_t^x$ pour presque tout $t\in[0,T]$. Et pour une sous-suite (α''_n), on a : $Z_t^{x,\alpha''_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}}\overline{Z}_t^x$.
On pose alors $\overline{\zeta}(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\zeta^{\alpha''_n}(x) & \text{si la limite existe}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
Ainsi, $\overline{Z}_t^x=\overline{\zeta}\left(X_t^x\right)$ et $\overline{\zeta}$ est mesurable en tant que limite simple de fonctions mesurables. ■

Remarque 3.2.6. La solution qu'on vient de construire vérifie :

$$\forall t\geqslant 0,\ \left|\overline{Y}_t^x\right|=\left|\overline{v}\left(X_t^x\right)\right|\leqslant\frac{K_x}{\eta}\left|X_t^x\right|.$$

Le théorème suivant montre l'unicité de λ, quand Y de croît au plus linéairement par rapport à X.

Théorème 3.2.7

On se place dans le cadre des hypothèses 3.1.1 et 3.2.1.
Aussi, on suppose que le triplet (Y',Z',λ') est solution de l'EDSRE (3.2.8) pour une certaine condition initiale $x\in\mathbb{R}^d$, où Y' est un processus continu et progressivement mesurable, Z' est un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega,\mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^l\right)\right)$ et $\lambda'\in\mathbb{R}$. Enfin, on suppose qu'il existe une constante $c_x>0$ (qui peut donc dépendre éventuellement de x), telle que $\mathbb{P}$-p.s.

$$\forall t\geqslant 0,\ \left|Y'_t\right|\leqslant c_x\left|X_t^x\right|.$$

Dans ces conditions, on a alors $\lambda'=\overline{\lambda}$.

Démonstration :
On pose $\widetilde{\lambda}=\lambda'-\overline{\lambda}$, $\widetilde{Y}=Y'-\overline{Y}^x$ et $\widetilde{Z}=Z'-\overline{Z}^x$.
En utilisant le fait que les triplets considérés sont solutions de l'équation (3.2.8), on trouve :

$$\widetilde{\lambda}=\frac{\widetilde{Y}_T-\widetilde{Y}_0}{T}+\frac{1}{T}\int_0^T\left[\psi\left(X_t^x,Z'_t\right)-\psi\left(X_t^x,\overline{Z}_t^x\right)\right]\mathrm{d}t-\frac{1}{T}\int_0^T\widetilde{Z}_t\,.\,\mathrm{d}W_t.$$

On définit un processus progressivement mesurable et borné par :

$$\gamma_t=\begin{cases}\frac{\psi(X_t^x,Z'_t)-\psi\left(X_t^x,\overline{Z}_t^x\right)}{\left|\widetilde{Z}_t\right|^2}\widetilde{Z}_t & \text{si } \widetilde{Z}_t\neq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Ainsi, on peut réécrire :

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\widetilde{Y}_T - \widetilde{Y}_0}{T} + \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{Z}_t \,.\, \gamma_t \,\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{Z}_t \,.\, \mathrm{d}W_t.$$

Par Girsanov, il existe une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_s \,\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien.
On en déduit, en prenant l'espérance sous $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\widetilde{\mathbb{E}}\left[\widetilde{Y}_T - \widetilde{Y}_0\right]}{T} \leqslant \frac{\left(\frac{K_x}{\eta} + c_x\right)\widetilde{\mathbb{E}}\left[|X_T^x|\right] + \left(\frac{K_x}{\eta} + c_x\right)|x|}{T}.$$

La proposition 3.1.6 indique que $\sup_{T>0} \widetilde{\mathbb{E}}\left[|X_T^x|\right] < \infty$.
Un passage à la limite $T \to +\infty$ fournit alors $\widetilde{\lambda} = 0$. ■

Remarque 3.2.8. En général, il n'y a pas unicité des solutions de l'EDSRE (3.2.8). Déjà, si (Y, Z, λ) en est une solution, on peut montrer facilement que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $(Y + k, Z, \lambda)$ en est une autre. Mais on peut aussi construire d'autres solutions qui ne diffèrent pas seulement d'une constante (même si on requiert qu'elles soient bornées).

Considérons l'EDSRE suivante :

$$-\mathrm{d}Y_t = \left[\psi\left(Z_t\right) - \lambda\right] \mathrm{d}t - Z_t \,\mathrm{d}W_t, \tag{3.2.16}$$

où W est un mouvement brownien unidimensionnel, et où $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, dérivable, et à dérivée bornée.

Une solution triviale de (3.2.16) est donnée par $Y = 0$, $Z = 0$ et $\lambda = \psi(0)$. Dans la suite, sans perdre en généralité, on va supposer que $\psi(0) = 0$.

Désormais, soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction bornée, dérivable et à dérivée bornée. L'EDSR suivante admet une solution sur $[t, T]$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{d}Y_s^{x,t} & = & \psi\left(Z_s^{x,t}\right)\mathrm{d}s - Z_s^{x,t}\,\mathrm{d}W_s \\ Y_T^{x,t} & = & \phi\left(x + W_T - W_t\right) \end{array}\right. .$$

On pose $u(t,x) = Y_t^{x,t}$. Alors, on peut montrer que u et $\partial_x u$ sont bornées. On pose alors $\widetilde{Y}_t = Y_t^{0,0} = u\left(t, W_t\right)$ et $\widetilde{Z}_t = Z_t^{0,0} = \partial_x u\left(t, W_t\right)$. Les processus $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ vérifient alors sur $[0, T]$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{d}\widetilde{Y}_t & = & \psi\left(\widetilde{Z}_t\right)\mathrm{d}t - \widetilde{Z}_t\,\mathrm{d}W_t \\ \widetilde{Y}_T & = & \phi\left(W_T\right) \end{array}\right. .$$

Il suffit alors de poser $\widetilde{Y}_t = \widetilde{Y}_T$ et $\widetilde{Z}_t = 0$ pour tout $t > t$; et on a ainsi construit une autre solution bornée à l'équation (3.2.16).

Remarque 3.2.9. Le résultat d'existence du théorème 3.2.5 demeure vrai sous des hypothèses plus faibles sur ψ. Supposons que ψ vérifie les propriétés suivantes :

$$|\psi(x,z) - \psi(x',z)| \leqslant K_x|x - x'|, \qquad |\psi(x,0)| \leqslant M, \qquad |\psi(x,z)| \leqslant K_z(1 + |z|).$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$, et soit $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : (x,z) \mapsto n^{d+l} f(nx, nz)$. On peut alors montrer que $\psi_{n,K}$ est une fonction uniformément continue et que $\psi_{n,K} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^1} \psi \mathbb{1}_K$ (on renvoie aux théorèmes 14.5 et 14.6 de [BP12]).
Le compact K étant arbitraire, on peut construire une suite ψ_n d'applications uniformément continues (et donc globalement lipschitziennes) dont une sous-suite converge presque partout sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l$ vers ψ.
Ainsi, on a, pour presque tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^l$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\psi_n(x,z) - \psi_n(x',z)| \leqslant K_x'|x - x'|, \qquad |\psi_n(x,0)| \leqslant M', \qquad |\psi_n(x,z)| \leqslant K_z'(1 + |z|), \qquad \psi_n(x,z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi(x,z).$$

On peut alors appliquer le théorème 3.2.5 avec ψ_n à la place de ψ : on construit ainsi une solution $\left(\overline{Y}^{x,n}, \overline{Z}^{x,n}, \lambda_n\right)$ de l'EDSRE (3.2.8) où ψ est remplacée par ψ_n. Dès lors, on peut écrire $\overline{Y}_t^{x,n} = \overline{v}^n\left(X_t^x\right)$ avec :

$$\left|\overline{v}^n(x) - \overline{v}^n(x')\right| \leqslant \frac{K_x'}{\eta}|x - x'|, \qquad \overline{v}^n(0) = 0, \qquad |\lambda_n| \leqslant M'.$$

Par extraction diagonale, une sous-suite de $(\overline{v}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une sous-suite de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\overline{v}$ et $\overline{\lambda}$.
La suite de la preuve du théorème est alors inchangée.

3.3 Différentiabilité

On s'intéresse désormais à la différentiabilité des solutions de l'EDSRE (3.2.8) par rapport à x.

Hypothèse 3.3.1

On suppose que les fonctions F et ψ vérifient les hypothèses suivantes :
- F est de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)$;
- ψ est de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}\right)$.

3.3.1 Différentiabilité des solutions des équations préliminaires (3.1.1), (3.2.10) et (3.2.9)

Théorème 3.3.2

On fait l'hypothèse 3.1.1 et on suppose de plus que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $T > 0$, $x \mapsto X^x$ est de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega; \mathcal{C}^0\left([0,T]; \mathbb{R}^d\right)\right)\right)$ et ∇X^x vérifie :

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \nabla X_t^x h = h + \int_0^t \nabla F\left(X_s^x\right) \nabla X_s^x h \,\mathrm{d}s.$$

Démonstration :

Soit $h \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $r > 0$, on note $\Delta_r^h X_t^x = \dfrac{X_t^{x+rh} - X_t^x}{r}$.

Soit Y un processus vérifiant : $\forall h \in \mathbb{R}^d$, $Y_t h = h + \int_0^t \nabla F\left(X_s^x\right) Y_s h \,\mathrm{d}s$.

On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\Delta_r^h X_t^x - Y_t h\right| \\
&\quad = \left|\frac{X_t^{x+rh} - X_t^x}{r} - \left(h + \int_0^t \nabla F\left(X_s^x\right) Y_s h \,\mathrm{d}s\right)\right| \\
&\quad = \left|\int_0^t \left[\frac{F\left(X_s^{x+rh}\right) - F\left(X_s^x\right)}{r} - \nabla F\left(X_s^x\right) Y_s h\right] \mathrm{d}s\right| \\
&\quad = \left|\int_0^t \left[\int_0^1 \nabla F\left(X_s^x + w\left(X_s^{x+rh} - X_s^x\right)\right) \frac{X_s^{x+rh} - X_s^x}{r} \,\mathrm{d}w - \nabla F\left(X_s^x\right) Y_s h\right] \mathrm{d}s\right| \\
&\quad = \left|\int_0^t \left[\int_0^1 \left(\nabla F\left(X_s^x + w\left(X_s^{x+rh} - X_s^x\right)\right) - \nabla F\left(X_s^x\right)\right) \Delta_r^h X_t^x \,\mathrm{d}w + \nabla F\left(X_s^x\right)\left(\Delta_r^h X_t^x - Y_s h\right)\right] \mathrm{d}s\right| \\
&\quad \leqslant \int_0^t \int_0^1 \left\|\nabla F\left(X_s^x + w\left(X_s^{x+rh} - X_s^x\right)\right) - \nabla F\left(X_s^x\right)\right\| \left|\Delta_r^h X_t^x\right| \mathrm{d}w \,\mathrm{d}s + \int_0^t \left\|\nabla F\left(X_s^x\right)\right\| \left|\Delta_r^h X_t^x - Y_s h\right| \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, ∇F est localement bornée ; de plus, $\left|\Delta_r^h X_t^x\right| \leqslant |h|$ (d'après la proposition 3.1.4). Par convergence dominée, on a donc :

$$\varepsilon(r) := \int_0^t \int_0^1 \left\|\nabla F\left(X_s^x + w\left(X_s^{x+rh} - X_s^x\right)\right) - \nabla F\left(X_s^x\right)\right\| \left|\Delta_r^h X_t^x\right| \mathrm{d}w \,\mathrm{d}s \xrightarrow[r \to 0]{\text{p.s.}} 0.$$

Puis, par le lemme de Gronwall,

$$\left|\Delta_r^h X_t^x - Y_t h\right| \leqslant \varepsilon(r) \exp\left(\int_0^t \left\|\nabla F\left(X_s^x\right)\right\| \,\mathrm{d}s\right).$$

Enfin, par convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} \left|\Delta_r^h X_t^x - Y_t h\right|^p\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\varepsilon(r)^p \exp\left(p \int_0^T \left\|\nabla F\left(X_s^x\right)\right\| \,\mathrm{d}s\right)\right] \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Dès lors, l'application $x \mapsto X^x$ est différentiable, et sa différentielle vérifie l'équation annoncée. Il reste à montrer la continuité de $x \mapsto \nabla X^x$.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, soit $h \in \mathbb{R}^d$, et soit $t \in [0,T]$;

$$\begin{aligned}\left|\nabla X_t^{x_1} h - \nabla X_t^{x_2} h\right| &\leqslant \int_0^t \left|\nabla F\left(X_s^{x_1}\right)\nabla X_s^{x_1} h - \nabla F\left(X_s^{x_2}\right)\nabla X_s^{x_2} h\right| \,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \int_0^t \left|\nabla F\left(X_s^{x_1}\right)\left(\nabla X_s^{x_1} h - \nabla X_s^{x_2} h\right)\right| \,\mathrm{d}s + \underbrace{\int_0^t \left|\left(\nabla F\left(X_s^{x_1}\right) - \nabla F\left(X_s^{x_2}\right)\right)\nabla X_s^{x_2} h\right| \,\mathrm{d}s}_{=\varepsilon(x_1,x_2)}\end{aligned}$$

Par un argument similaire au précédent, on montre que $\varepsilon(x_1, x_2) \xrightarrow[x_2 \to x_1]{\text{p.s.}} 0$.
Par Gronwall, on en déduit alors :

$$\left|\nabla X_t^{x_1} h - \nabla X_t^{x_2} h\right| \leqslant \varepsilon(x_1, x_2) \exp\left(\int_0^t \left\|\nabla F\left(X_s^{x_1}\right)\right\| \,\mathrm{d}s\right).$$

En fin de compte,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\nabla X_t^{x_1} h - \nabla X_t^{x_2} h\right|^p\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\varepsilon(x_1, x_2)^p \exp\left(p\int_0^T \left\|\nabla F\left(X_s^{x_1}\right)\right\| \,\mathrm{d}s\right)\right] \xrightarrow[x_2 \to x_1]{} 0.$$

■

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$; dans la proposition qui vient, on considère l'équation (3.2.10) :

$$Y_t^n = \int_{t\wedge n}^n \left(\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^n\right) - \alpha Y_\sigma^n\right) \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n Z_\sigma^n \,.\, \mathrm{d}W_\sigma,$$

dont on a déjà rappelé qu'elle possède une unique solution $\left(Y^{n,x}, Z^{n,x}\right)$. Cela nous avait permis de montrer dans le théorème 3.2.2 l'existence d'une solution à l'EDSR (3.2.9).

Proposition 3.3.3

Sous les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1, les applications $x \mapsto Y^{n,x}$ et $x \mapsto Z^{n,x}$ sont de classes respectives $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}^0\left([0,n], \mathbb{R}\right)\right)\right)$ et $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,n], \mathbb{R}^l\right)\right)\right)$.
Aussi, on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$:

$$\nabla Y_t^{n,x} h = \int_{t\wedge n}^n \left[\nabla_x \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\nabla X_\sigma^x h + \nabla_z \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\nabla Z_\sigma^{n,x} h - \alpha \nabla Y_\sigma^{n,x} h\right] \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n \nabla Z_\sigma^{n,x} h \,.\, \mathrm{d}W_\sigma \tag{3.3.17}$$

De plus, on a, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\sup_{t\in[0,n]} \left|\nabla Y_t^{n,x}\right| \leqslant \frac{K_x}{\alpha} \tag{3.3.18}$$

Démonstration :

Étape 1 : montrons que $x \mapsto Y^{n,x}$ et $x \mapsto Z^{n,x}$ sont différentiables.

Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, posons $\Delta_r^h Y_t^{n,x} = \dfrac{Y_t^{n,x+rh} - Y_t^x}{r}$ et $\Delta_r^h Z_t^{n,x} = \dfrac{Z_t^{n,x+rh} - Z_t^x}{r}$.
On a alors la relation suivante :

$$\Delta_r^h Y_t^{n,x} = \int_{t\wedge n}^n \left[\frac{\psi\left(X_\sigma^{x+rh}, Z_\sigma^{n,x+rh}\right) - \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)}{r} - \alpha \Delta_r^h Y_\sigma^{n,x}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n \Delta_r^h Z_\sigma^{n,x} \,.\, \mathrm{d}W_\sigma.$$

On introduit la solution $\left(\widehat{Y}, \widehat{Z}\right)$ de l'EDSR à horizon fini :

$$\forall h \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{Y}_t h = \int_{t\wedge n}^n \left[\nabla_x \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\nabla X_\sigma^x h + \nabla_z \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\widehat{Z}_\sigma h - \alpha \widehat{Y}_\sigma h\right] \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n \widehat{Z}_\sigma h \,.\, \mathrm{d}W_\sigma.$$

On pose alors $\overline{Y}_t = \Delta_h^r Y_t^{n,x} - \widehat{Y}_t h$ et $\overline{Z}_t = \Delta_h^r Z_t^{n,x} - \widehat{Z}_t h$.
Pour $t \leqslant n$, on a donc la relation :

$$\overline{Y}_t + \int_t^n \overline{Z}_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma = \int_t^n \left[\frac{\psi\left(X_\sigma^{x+rh}, Z_\sigma^{n,x+rh}\right) - \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)}{r} - \nabla_x \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right) \nabla X_\sigma^x h - \nabla_z \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right) \widehat{Z}_\sigma h - \alpha \overline{Y}_\sigma \right] \mathrm{d}\sigma.$$

On note $f_\sigma = \dfrac{\psi\left(X_\sigma^{x+rh}, Z_\sigma^{n,x+rh}\right) - \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)}{r} - \nabla_x \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right) \nabla X_\sigma^x h - \nabla_z \psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right) \widehat{Z}_\sigma h - \alpha \overline{Y}_\sigma$.
On veut montrer que $\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,n]} \left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^n \left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Voici notre plan d'attaque : on va se restreindre à des intervalles de type $[n-\delta, n]$, $[n-2\delta, n-\delta]$, etc. et raisonner par récurrence ; comme l'intervalle $[n-\delta, n]$ est plus facile à traiter et que les autres sont similaires, on va s'intéresser uniquement à l'intervalle $[n-2\delta, n-\delta]$.
Soit $t \in [n-2\delta, n-\delta]$, on écrit :

$$\overline{Y}_t + \int_t^{n-\delta} \overline{Z}_\sigma \,.\, \mathrm{d}W_\sigma = \int_t^{n-\delta} f_\sigma \,\mathrm{d}\sigma + \overline{Y}_{n-\delta}.$$

Prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, il vient :

$$\overline{Y}_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^{n-\delta} f_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right] + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\overline{Y}_{n-\delta}\right].$$

Ainsi,

$$\left|\overline{Y}_t\right|^2 \leqslant 2\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\left(\int_t^{n-\delta} |f_\sigma| \,\mathrm{d}\sigma\right)^2\right] + 2\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right] \leqslant 2\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[(n-\delta-t)\int_t^{n-\delta} |f_\sigma|^2 \,\mathrm{d}\sigma\right] + 2\mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right].$$

Puis, passant au supremum :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\overline{Y}_t\right|^2\right] \leqslant 2\delta \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta} |f_\sigma|^2 \,\mathrm{d}\sigma\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right].$$

D'autre part, par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta} \left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] &\leqslant c_2 \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\int_{n-2\delta}^t \overline{Z}_s \,.\, \mathrm{d}W_s\right|^2\right] \\
&\leqslant 3c_2 \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + 3c_2 \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\int_{n-2\delta}^t f_\sigma \,\mathrm{d}\sigma\right|^2\right] + 3c_2 \mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right] \\
&\leqslant 6c_2 \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + 3c_2 \delta \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta} |f_\sigma|^2 \,\mathrm{d}\sigma\right].
\end{aligned}$$

En définitive, on obtient la majoration suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [n-2\delta, n-\delta]} \left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta} \left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant (12c_2 + 2)\,\mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right] + (15c_2 + 2)\,\delta \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta} |f_\sigma|^2 \,\mathrm{d}\sigma\right].$$

Déjà, l'hypothèse de récurrence fournit $\mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right] \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$.

On décompose f_σ sous la forme $f_\sigma^{(1)} + f_\sigma^{(2)} + f_\sigma^{(3)}$, où :

$$\begin{aligned}
f_\sigma^{(1)} &= \frac{\psi\left(X_\sigma^{x+rh}, Z_\sigma^{n,x+rh}\right) - \psi\left(X_\sigma^{x}, Z_\sigma^{n,x+rh}\right)}{r} - \nabla_x\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\nabla X_\sigma^x h \\
&= \int_0^1 \left[\nabla_x\psi\left(X_\sigma^x + w\left(X_\sigma^{x+rh} - X_\sigma^x\right), Z_\sigma^{x+rh}\right)\Delta_r^h X_\sigma^x - \nabla_x\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\nabla X_\sigma^x h\right] \mathrm{d}w \\
&= \int_0^1 \left[\nabla_x\psi\left(X_\sigma^x + w\left(X_\sigma^{x+rh} - X_\sigma^x\right), Z_\sigma^{x+rh}\right)\left(\Delta_r^h X_\sigma^x - \nabla X_\sigma^x h\right)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\nabla_x\psi\left(X_\sigma^x + w\left(X_\sigma^{x+rh} - X_\sigma^x\right), Z_\sigma^{x+rh}\right) - \nabla_x\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\right)\nabla X_\sigma^x h\right] \mathrm{d}w; \\
f_\sigma^{(2)} &= \int_0^1 \left[\nabla_z\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x} + w\left(Z_\sigma^{n,x+rh} - Z_\sigma^{n,x}\right)\right) - \nabla_z\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x}\right)\right]\widehat{Z}_\sigma h \,\mathrm{d}w; \\
f_\sigma^{(3)} &= \int_0^1 \left[\nabla_z\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{n,x} + w\left(Z_\sigma^{n,x+rh} - Z_\sigma^{n,x}\right)\right)\overline{Z}_\sigma - \alpha\overline{Y}_\sigma\right] \mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

Comme ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto Z^{n,x}$ continue, par convergence dominée, on montre que :

$$\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(1)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(2)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(3)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\int_0^1 2K_z^2\left|\overline{Z}_\sigma\right|^2 \mathrm{d}w\,\mathrm{d}\sigma + \int_{n-2\delta}^{n-\delta} 2\alpha^2\left|\overline{Y}_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \\
&\leqslant 2K_z^2\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] + 2\alpha^2\delta\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right].
\end{aligned}$$

On pose alors $K = \max\left\{2K_z^2, 2\alpha^2\delta\right\}$.
On a montré que :

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right]\right) \\
&\qquad \leqslant 3\delta\left(15c_2+2\right)K\limsup_{r\to 0}\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right]\right).
\end{aligned}$$

Si $\delta < \dfrac{1}{3K\left(15c_2+2\right)}$, alors on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a bien montré que $x \mapsto Y^{n,x}$ et $x \mapsto Z^{n,x}$ sont différentiables.

Étape 2 : on va suivre la même démarche pour montrer la continuité de $x \mapsto \nabla Y^{n,x}$ et $x \mapsto \nabla Z^{n,x}$.
On fixe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$; on note $\overline{Y}_t = \nabla Y_t^{n,x_1}h - \nabla Y_t^{n,x_2}h$ et $\overline{Z}_t = \nabla Z_t^{n,x_1}h - \nabla Z_t^{n,x_2}h$.
On procède encore par récurrence, et on écrit, pour $t \in [n-2\delta, n-\delta]$:

$$\overline{Y}_t + \int_t^{n-\delta}\overline{Z}_\sigma\,.\,\mathrm{d}W_\sigma = \int_t^{n-\delta} f_\sigma\,\mathrm{d}\sigma + \overline{Y}_{n-\delta},$$

$$\begin{aligned}
\text{où } f_\sigma = &\nabla_x\psi\left(X_\sigma^{x_1}, Z_\sigma^{n,x_1}\right)\nabla X_\sigma^{x_1} + \nabla_z\psi\left(X_\sigma^{x_1}, Z_\sigma^{n,x_1}\right)\nabla Z_\sigma^{n,x_1} \\
&- \nabla_x\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\nabla X_\sigma^{x_2} - \nabla_z\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\nabla Z_\sigma^{n,x_2} - \alpha\overline{Y}_\sigma.
\end{aligned}$$

Comme auparavant,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \leqslant \left(12c_2+2\right)\mathbb{E}\left[\left|\overline{Y}_{n-\delta}\right|^2\right] + \left(15c_2+2\right)\delta\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right].$$

On décompose alors f_σ sous la forme de la somme des termes suivants :

$$f_\sigma^{(1)} = \left[\nabla_x\psi\left(X_\sigma^{x_1}, Z_\sigma^{n,x_1}\right) - \nabla_x\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\right]\nabla X_\sigma^{x_1}h + \left[\nabla_z\psi\left(X_\sigma^{x_1}, Z_\sigma^{n,x_1}\right) - \nabla_z\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\right]\nabla Z_\sigma^{n,x_1}h;$$

$$f_\sigma^{(2)} = \nabla_x\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\left(\nabla X_\sigma^{x_1}h - \nabla X_\sigma^{x_2}h\right);$$

$$f_\sigma^{(3)} = \nabla_z\psi\left(X_\sigma^{x_2}, Z_\sigma^{n,x_2}\right)\overline{Z}_\sigma - \alpha\overline{Y}_\sigma.$$

Comme dans la première étape, par convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(1)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \underset{x_2\to x_1}{\longrightarrow} 0, \qquad \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(2)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \underset{x_2\to x_1}{\longrightarrow} 0.$$

Aussi,

$$\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|f_\sigma^{(3)}\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \leqslant K\left(\mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_\sigma\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right]\right).$$

Pour $\delta > 0$ suffisamment petit, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[n-2\delta,n-\delta]}\left|\overline{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_{n-2\delta}^{n-\delta}\left|\overline{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] \underset{x_2\to x_1}{\longrightarrow} 0.$$

Étape 3 : montrons la dernière majoration. On opère comme pour l'unicité dans le théorème 3.2.2. Partant de l'équation (3.3.17), on a, pour $t \leqslant n$:

$$\mathrm{d}\left(\nabla Y_t^{n,x}h\right) = -\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{n,x}\right)\nabla X_t^x h\,\mathrm{d}t + \alpha\nabla Y_t^{n,x}h\,\mathrm{d}t + \nabla Z_t^{n,x}h\,.\left[\mathrm{d}W_t - \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{n,x}\right)\mathrm{d}t\right] \quad (3.3.19)$$

Comme $\nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{n,x}\right)$ est borné par K_z, par Girsanov, $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \nabla_z\psi\left(X_s^x, Z_s^{n,x}\right)\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien sous une certaine loi $\widetilde{\mathbb{P}}$.
Notant L^0 le temps local de $\nabla Y_t^{n,x}h$ en 0, en utilisant la formule de Tanaka, en intégrant et en prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on obtient :

$$0 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right| = -\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\frac{\nabla Y_s^{n,x}h}{\left|\nabla Y_s^{n,x}h\right|}\nabla_x\psi\left(X_s^x, Z_s^{n,x}\right)\nabla X_s^x h\,\mathrm{d}s\right] + \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\,\mathrm{d}L_s^0\right].$$

Finalement,

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right| \leqslant \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{-\alpha s}\left|\frac{\nabla Y_s^{n,x}h}{\left|\nabla Y_s^{n,x}h\right|}\right|\left|\nabla_x\psi\left(X_s^x, Z_s^{n,x}\right)\nabla X_s^x h\right|\mathrm{d}s\right] \leqslant K_x|h|\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\alpha n}}{\alpha}.$$

Donc $\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right| \leqslant K_x|h|\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha(n-t)}}{\alpha} \leqslant \dfrac{K_x}{\alpha}|h|$. ■

Lemme 3.3.4

Sous les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1, pour tout $\alpha > 0$, la fonction v^α est de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$.

Démonstration :
En appliquant la formule d'Itô à l'équation (3.3.19), on obtient :

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-2\alpha t}\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right|^2\right) = \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left[-2\nabla Y_t^{n,x}h\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{n,x}\right)\nabla X_t^x h\,\mathrm{d}t + 2\nabla Y_t^{n,x}h\nabla Z_t^{n,x}h\,.\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t + \left|\nabla Z_t^{n,x}h\right|^2\mathrm{d}t\right].$$

Ainsi, en intégrant puis en prenant l'espérance selon la loi $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\widetilde{W}$ est un mouvement brownien :

$$-\left|\nabla Y_0^{n,x}h\right|^2 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty -2\mathrm{e}^{-2\alpha t}\nabla Y_t^{n,x}h\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{n,x}\right)\nabla X_t^x h\,\mathrm{d}t\right] + \widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left|\nabla Z_t^{n,x}h\right|^2\mathrm{d}t\right].$$

En conséquence, on obtient, en utilisant notamment la majoration (3.3.18) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left|\nabla Z_t^{n,x}h\right|^2\,\mathrm{d}t\right] &\leqslant 2\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\nabla Y_t^{n,x}h\nabla_x\psi\left(X_t^x,Z_t^{n,x}\right)\nabla X_t^x h\,\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant 2\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right|\left|\nabla_x\psi\left(X_t^x,Z_t^{n,x}\right)\nabla X_t^x h\right|\,\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant 2\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\frac{K_x}{\alpha}|h|K_x|h|\,\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant \frac{2K_x^2}{\alpha}|h|^2
\end{aligned}$$

Toujours en utilisant la majoration (3.3.18), il vient :

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left(\left|\nabla Y_t^{n,x}h\right|^2+\left|\nabla Z_t^{n,x}h\right|^2\right)\,\mathrm{d}t\right]\leqslant\left(\frac{K_x^2}{\alpha^2}+\frac{2K_x^2}{\alpha}\right)|h|^2.$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{M}^{2,-2\alpha}$ des couples (y,z) de processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés tels que :

$$|(y,z)|^2_{\mathcal{M}^{2,-2\alpha}}:=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\alpha t}\left(|y_t|^2+|z_t|^2\right)\,\mathrm{d}t\right]<\infty.$$

Étant bornée dans cet espace, la suite $\left(\nabla Y^{n,x},\nabla Z^{n,x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement (quitte à extraire) ; on note $\left(U^1(x,h),V^1(x,h)\right)$ sa limite dans $\mathcal{M}^{2,-2\alpha}$. Toujours en extrayant éventuellement une sous-suite, on peut dire que $\nabla Y_0^{n,x}h\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\xi(x,h)$.
On définit alors :

$$U^2(x,h)=\xi(x,h)-\int_0^t\left[\nabla_x\psi\left(X_s^x,Z_s^{x,\alpha}\right)\nabla X_s^x h+\nabla_z\psi\left(X_s^x,Z_s^{x,\alpha}\right)V_s^1(x,h)-\alpha U_s^1(x,h)\right]\,\mathrm{d}s+\int_0^t V_s^1(x,h)\,.\,\mathrm{d}W_s.$$

Aussi, on a :

$$\nabla Y_t^{n,x}h=\nabla Y_0^{n,x}h-\int_0^t\left[\nabla_x\psi\left(X_s^x,Z_s^{n,x}\right)\nabla X_s^x h+\nabla_z\psi\left(X_s^x,Z_s^{n,x}\right)\nabla Z_s^{n,x}h-\alpha\nabla Y_s^{n,x}h\right]\,\mathrm{d}s+\int_0^t\nabla Z_s^{n,x}h\,.\,\mathrm{d}W_s.$$

D'après la démonstration du théorème 3.2.2, on a $(Y^{n,x},Z^{n,x})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(Y^{x,\alpha},Z^{x,\alpha})$ en mesure $\mathbb{P}\otimes\mathrm{d}t$; aussi, on a vu que $(\nabla Y^{n,x}h,\nabla Z^{n,x}h)\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\left(U^1(x,h),V^1(x,h)\right)$ faiblement dans $\mathcal{M}^{2,-2\alpha}$. Ainsi, $\nabla Y^{n,x}h\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}U^2(x,h)$ faiblement dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}([0,T],\mathbb{R})$ pour tout $T>0$.
En conséquence, $U_t^1(x,h)=U_t^2(x,h)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t\in\mathbb{R}_+$.
Mais $\left|U_t^1(x,h)\right|\leqslant\dfrac{K_x}{\alpha}|h|$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t\in\mathbb{R}_+$, et $t\mapsto U_t^2(x,h)$ est continue, donc $\left|U_t^2(x,h)\right|\leqslant\dfrac{K_x}{\alpha}|h|$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour tout $t\in\mathbb{R}_+$.
Aussi, $\left(U_\bullet^2(x,h),V_\bullet^1(x,h)\right)$ est solution de :

$$U_t(x,h)=U_0(x,h)-\int_0^t\left[\nabla_x\psi\left(X_s^x,Z_s^{x,\alpha}\right)\nabla X_s^x h+\nabla_z\psi\left(X_s^x,Z_s^{x,\alpha}\right)V_s(x,h)-\alpha U_s(x,h)\right]\,\mathrm{d}s+\int_0^t V_s(x,h)\,.\,\mathrm{d}W_s.$$

Mais, d'après le théorème 3.2.2, cette équation admet une unique solution telle que U soit bornée car $\nabla_x\psi$ et $\nabla_z\psi$ sont bornées.
En particulier, $U_0^2(x,h)=\xi(x,h)$.
Dès lors, une double utilisation du théorème de convergence dominée nous permet de montrer que :

$$\begin{aligned}
\frac{Y_0^{x+rh,\alpha}-Y_0^{x,\alpha}}{r}&=\frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\left(Y_0^{n,x+rh}-Y_0^{n,x}\right)=\frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\nabla Y_0^{n,x+wrh}rh\,\mathrm{d}w\\
&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\nabla Y_0^{n,x+wrh}h\,\mathrm{d}w=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\nabla Y_0^{n,x+wrh}h\,\mathrm{d}w=\int_0^1\xi(x+wrh,h)\,\mathrm{d}w\underset{r\to 0}{\longrightarrow}\xi(x,h)
\end{aligned}$$

L'application étant bornée et linéaire en h, on en conclut la différentiabilité de $v^\alpha : x\mapsto Y_0^{x,\alpha}$. Il reste à montrer la continuité de sa différentielle vis-à-vis de x.

Pour cela, on considère une suite (x_m) qui converge vers $x \in \mathbb{R}^d$. Notant $(\nabla Y^{n,x}h, \nabla Z^{n,x}h)$ l'unique solution de l'EDSR (3.3.17), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\nabla Y_0^{x,\alpha}h - \nabla Y_0^{x_m,\alpha}h\right| &\leqslant \left|\nabla Y_0^{x,\alpha}h - \nabla Y_0^{n,x}h\right| + \left|\nabla Y_0^{n,x}h - \nabla Y_0^{n,x_m}h\right| + \left|\nabla Y_0^{n,x_m}h - \nabla Y_0^{x_m,\alpha}h\right| \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha n}\frac{K_x}{\alpha}|h| + \left|\nabla Y_0^{n,x}h - \nabla Y_0^{n,x_m}h\right| + \mathrm{e}^{-\alpha n}\frac{K_x}{\alpha}|h|,\end{aligned}$$

la majoration de $\left|\nabla Y_0^{x,\alpha}h - \nabla Y_0^{n,x}h\right|$ s'obtenant en adaptant le calcul de la vitesse de convergence (3.2.11) avec la borne fournie en (3.3.18).
Par la proposition 3.3.3, on a : $\left|\nabla Y_0^{n,x}h - \nabla Y_0^{n,x_m}h\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\limsup_{m\to\infty} \left|\nabla Y_0^{x,\alpha}h - \nabla Y_0^{x_m,\alpha}h\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-\alpha n}\frac{K_x}{\alpha}|h| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ∎

Théorème 3.3.5

Sous les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1, pour tout $\alpha > 0$, les fonctions $x \mapsto Y^{x,\alpha}$ et $x \mapsto Z^{x,\alpha}$ sont respectivement de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}^0\left([0,T], \mathbb{R}\right)\right)\right)$ et $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,T], \mathbb{R}^l\right)\right)\right)$, pour tout $T > 0$.
Leurs différentielles vérifient, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{d}\nabla Y_t^{x,\alpha}h = -\left[\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)\nabla X_t^x h + \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)\nabla Z_t^{x,\alpha}h - \alpha\nabla Y_t^{x,\alpha}h\right]\mathrm{d}t + \nabla Z_t^{x,\alpha}h\,.\,\mathrm{d}W_t. \tag{3.3.20}$$

Démonstration :
Le théorème 3.3.2 et le lemme 3.3.4 nous permettent de montrer que $x \mapsto Y^{x,\alpha}$ a la régularité voulue.
Pour $x \mapsto Z^{x,\alpha}$, on va utiliser les estimations *a priori* fournies par la proposition 2.1 de [EPQ97].
À l'aide d'une formule de Taylor, on montre que :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\Delta_r^h Y_t^{x,\alpha}\right) = -&\left[\left(\int_0^1 \nabla_x\psi\left(X_t^x + w\left(X_t^{x+rh} - X_t^x\right), Z_t^{x+rh,\alpha}\right)\mathrm{d}w\right)\Delta_r^h X_t^x\right. \\ &\left.+\left(\int_0^1 \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha} + w\left(Z_t^{x+rh,\alpha} - Z_t^{x,\alpha}\right)\right)\mathrm{d}w\right)\Delta_r^h Z_t^{x,\alpha} - \alpha\Delta_r^h Y_t^{x,\alpha}\right]\mathrm{d}t + \Delta_r^h Z_t^{x,\alpha}\,.\,\mathrm{d}W_t,\end{aligned}$$

où on continue à noter, pour $r > 0$ et $h \in \mathbb{R}^d$, $\Delta_r^h X_t^x = \dfrac{X_t^{x+rh} - X_t^x}{r}$, etc.
Aussi, on considère l'EDSR d'horizon fini $T > 0$, dont les inconnues sont U et V :

$$\mathrm{d}U_t = -\left[\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)\nabla X_t^x h + \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)V_t - \alpha U_t\right]\mathrm{d}t + V_t\,.\,\mathrm{d}W_t. \tag{3.3.21}$$

Le résultat cité en début de démonstration nous fournit alors la majoration suivante, où $C = \max\{\alpha, K_z\}$ et $\beta = C^2 + 3C + 1$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{\beta t}\left|\Delta_r^h Z_t^{x,\alpha} - V_t\right|^2\mathrm{d}t\right] \leqslant (C+1)\left\{\mathrm{e}^{\beta T}\mathbb{E}\left[\left|\Delta_r^h Y_T^{x,\alpha} - U_T\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{\beta t}\left|f_1(t, U_t, V_t) - f_2(t, U_t, V_t)\right|^2\mathrm{d}t\right]\right\},$$

où

$$\begin{aligned}f_1(t, U_t, V_t) &= -\left(\int_0^1 \nabla_x\psi\left(X_t^x + w\left(X_t^{x+rh} - X_t^x\right), Z_t^{x+rh,\alpha}\right)\mathrm{d}w\right)\Delta_r^h X_t^x \\ &\qquad - \left(\int_0^1 \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha} + w\left(Z_t^{x+rh,\alpha} - Z_t^{x,\alpha}\right)\right)\mathrm{d}w\right)V_t + \alpha U_t, \\ f_2(t, U_t, V_t) &= -\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)\nabla X_t^x h - \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right)V_t + \alpha U_t.\end{aligned}$$

Par unicité des solutions de (3.3.21), et comme $\nabla Y^{x,\alpha}$ est bornée par $\dfrac{K_x}{\alpha}$, on a $U_t = \nabla Y_t^{x,\alpha}h$; le caractère $\mathcal{C}^1$ de $x \mapsto Y^{x,\alpha}$ assure alors en particulier que $\mathbb{E}\left[\left|\Delta_r^h Y_T^{x,\alpha} - U_T\right|^2\right] \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Par ailleurs, une utilisation répétée du théorème de convergence dominée (comme par exemple à la fin du

lemme 3.3.4) nous permet de montrer que $\mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{\beta t}\left|f_1\left(t, U_t, V_t\right)-f_2\left(t, U_t, V_t\right)\right|^2 \mathrm{~d} t\right] \underset{r \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ également.
On en déduit la différentiabilité de $x \mapsto Z^{x, \alpha}$ car :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\Delta_r^h Z_t^{x, \alpha}-V_t\right|^2 \mathrm{~d} t\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{\beta t}\left|\Delta_r^h Z_t^{x, \alpha}-V_t\right|^2 \mathrm{~d} t\right] \underset{r \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

On opère similairement pour montrer que $x \mapsto \nabla Z^{x, \alpha}$ est continue, en considérant un estimation *a priori* de la distance entre les solutions des EDSR à horizon fini $T>0$:

$$\mathrm{d} \nabla Y_t^{x_1, \alpha} h=-\left[\nabla_x \psi\left(X_t^{x_1}, Z_t^{x_1, \alpha}\right) \nabla X_t^{x_1} h+\nabla_z \psi\left(X_t^{x_1}, Z_t^{x_1, \alpha}\right) \nabla Z_t^{x_1, \alpha} h-\alpha \nabla Y_t^{x_1, \alpha} h\right] \mathrm{d} t+\nabla Z_t^{x_1, \alpha} h \,.\, \mathrm{d} W_t,$$
$$\mathrm{d} \nabla Y_t^{x_2, \alpha} h=-\left[\nabla_x \psi\left(X_t^{x_2}, Z_t^{x_2, \alpha}\right) \nabla X_t^{x_2} h+\nabla_z \psi\left(X_t^{x_2}, Z_t^{x_2, \alpha}\right) \nabla Z_t^{x_2, \alpha} h-\alpha \nabla Y_t^{x_2, \alpha} h\right] \mathrm{d} t+\nabla Z_t^{x_2, \alpha} h \,.\, \mathrm{d} W_t. \quad \blacksquare$$

3.3.2 Différentiabilité des solutions de l'EDSRE (3.2.8)

Théorème 3.3.6

On suppose vérifiées les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1.
Alors, la fonction $\bar{v}$ définie en (3.2.15) est de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$.

Démonstration :
Les résultats précédents nous ont permis d'obtenir la différentiabilité des applications $x \mapsto X^x$, $x \mapsto Y^{x, \alpha}$, $x \mapsto Z^{x, \alpha}$ et v^α. On a montré qu'on avait l'équation (3.3.20), pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{d} \nabla Y_t^{x, \alpha} h=-\left[\nabla_x \psi\left(X_t^x, Z_t^{x, \alpha}\right) \nabla X_t^x h+\nabla_z \psi\left(X_t^x, Z_t^{x, \alpha}\right) \nabla Z_t^{x, \alpha} h-\alpha \nabla Y_t^{x, \alpha} h\right] \mathrm{d} t+\nabla Z_t^{x, \alpha} h \,.\, \mathrm{d} W_t.$$

On va d'abord affiner la majoration $\left|\nabla Y_t^{x, \alpha}\right| \leqslant \dfrac{K_x}{\alpha}$; on définit deux processus par :

$$U_t^{x, \alpha}=\mathrm{e}^{\eta t} \nabla Y_t^{x, \alpha} h \quad \text { et } \quad V_t^{x, \alpha}=\mathrm{e}^{\eta t} \nabla Z_t^{x, \alpha} h.$$

Par Girsanov, comme $\nabla_z \psi$ est bornée par K_z, il existe un processus $\widetilde{W}$ qui soit un mouvement brownien sous une loi $\widetilde{\mathbb{P}}$ tel qu'on ait l'équation suivante :

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) t} U_t^{x, \alpha}\right)=\mathrm{e}^{-\alpha t} \nabla_x \psi\left(X_t^x, Z_t^{x, \alpha}\right) \nabla X_t^x h \,\mathrm{d} t-\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) t} V_t^{x, \alpha} \,.\, \mathrm{d} \widetilde{W}_t.$$

En intégrant, puis en prenant l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on en déduit :

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) T} U_T^{x, \alpha}\right]-\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) t} U_t^{x, \alpha}=\widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha s} \nabla_x \psi\left(X_s^x, Z_s^{x, \alpha}\right) \nabla X_s^x h \,\mathrm{d} s\right].$$

Ceci se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\left|U_t^{x, \alpha}\right| & \leqslant \mathrm{e}^{-(\alpha+\eta)(T-t)} \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_t}\left[\left|U_T^{x, \alpha}\right|\right]+\mathrm{e}^{(\alpha+\eta) t} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\alpha s} K_x \mathrm{e}^{-\eta s}|h| \,\mathrm{d} s\right] \\
& \leqslant \mathrm{e}^{-(\alpha+\eta)(T-t)} \mathrm{e}^{\eta T} \frac{K_x}{\alpha}|h|+\mathrm{e}^{(\alpha+\eta) t} K_x|h| \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) t}-\mathrm{e}^{-(\alpha+\eta) T}}{\alpha+\eta}.
\end{aligned}$$

Faisant alors tendre $T \rightarrow+\infty$, il vient :

$$\left|U_t^{x, \alpha}\right| \leqslant 0+K_x|h| \frac{1}{\alpha+\eta}.$$

On en déduit donc les majorations, $\mathbb{P}$-p.s., et pour tout $t \geqslant 0$:

$$\left|U_t^{x, \alpha}\right| \leqslant \frac{K_x|h|}{\alpha+\eta} \quad \text { et } \quad\left|\nabla Y_t^{x, \alpha} h\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t} \frac{K_x|h|}{\alpha+\eta}. \tag{3.3.22}$$

Désormais, on introduit l'équation limite, d'inconnue $\left(U^x, V^x\right)$:

$$-\mathrm{d} U_t^x=\left[\mathrm{e}^{\eta t} \nabla_x \psi\left(X_t^x, \bar{Z}_t^x\right) \nabla X_t^x h+\nabla_z \psi\left(X_t^x, \bar{Z}_t^x\right) V_t^x-\eta U_t^x\right] \mathrm{d} t-V_t^x \,.\, \mathrm{d} W_t.$$

Elle possède une unique solution telle que U^x soit bornée et $V^x \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^l\right)\right)$. On rappelle également que, pour une certaine suite (α_n), on a $\overline{v}^{\alpha_n}(x) = Y_0^{x,\alpha_n} - Y_0^{0,\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{Y}_0^x$. Notre objectif est maintenant de montrer que $\nabla\overline{v}^{\alpha_n}(x) = U_0^{x,\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U_0^x$.
On introduit les EDSR à horizon fini, pour $t \in [0,N]$:

$$\begin{cases} -\mathrm{d}U_t^{x,\alpha_n,N} = \left[\mathrm{e}^{\eta t}\nabla_x\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha_n}\right)\nabla X_t^x h + \nabla_z\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha_n}\right)V_t^{x,\alpha_n,N} - (\alpha_n+\eta)\,U_t^{x,\alpha_n,N}\right]\mathrm{d}t - V_t^{x,\alpha_n,N}\,.\,\mathrm{d}W_t \\ U_N^{x,\alpha_n,N} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mathrm{d}U_t^{x,N} = \left[\mathrm{e}^{\eta t}\nabla_x\psi\left(X_t^x, \overline{Z}_t^x\right)\nabla X_t^x h + \nabla_z\psi\left(X_t^x, \overline{Z}_t^x\right)V_t^{x,N} - \eta U_t^{x,N}\right]\mathrm{d}t - V_t^{x,N}\,.\,\mathrm{d}W_t \\ U_N^{x,N} = 0 \end{cases}$$

Comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3.2.5, on a : $\mathbb{E}\left[\int_0^N \left|Z_t^{x,\alpha_n} - \overline{Z}_t^x\right|^2 \mathrm{d}t\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par une estimation *a priori*, on montre alors que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $U_0^{x,\alpha_n,N} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U_0^{x,N}$ (voir par exemple la démonstration du théorème 3.3.5).
Aussi, en intégrant entre 0 et N les équations vérifiées par $U_t^{x,\alpha_n,N} - U_t^{x,\alpha_n}$ et par $U_t^{x,N} - U_t^x$, en prenant l'espérance sous une bonne loi, et en utilisant la majoration (3.3.22), on montre que :

$$\left|U_0^{x,\alpha_n,N} - U_0^{x,\alpha_n}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta N}\frac{K_x|h|}{\eta} \qquad \text{et} \qquad \left|U_0^{x,N} - U_0^x\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\eta N}\frac{K_x|h|}{\eta}.$$

On en déduit alors, par inégalité triangulaire, que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|U_0^{x,\alpha_n} - U_0^x\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-\eta N}\frac{K_x|h|}{\eta} + \left|U_0^{x,\alpha_n,N} - U_0^{x,N}\right|.$$

Ainsi, $\limsup_{n\to\infty}\left|U_0^{x,\alpha_n} - U_0^x\right| \leqslant 2\mathrm{e}^{-\eta N}\frac{K_x|h|}{\eta} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $U_0^{x,\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U_0^x$.
On a donc montré la différentiabilité de $\overline{v}$. Pour montrer que $\nabla\overline{v}$ est continu, on opère comme à la fin de la démonstration du lemme 3.3.4. ∎

Le théorème suivant va nous permettre d'exprimer le processus $\overline{Z}^x$ comme une fonction du processus X^x.

Théorème 3.3.7

Toujours sous les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1, on a, pour presque tout $t \geqslant 0$,

$$\overline{Z}_t^x = \nabla\overline{v}\left(X_t^x\right)G \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Démonstration :
On renvoie au théorème 3.17 de [Mas08]. ∎

Remarque 3.3.8. On a vu que $\overline{v}$ est une fonction globalement lipschitzienne, de constante de Lipschitz $\frac{K_x}{\eta}$. Ainsi, le théorème précédent, indique que, sous de bonnes hypothèses sur F et ψ, on a, pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left|\overline{Z}_t^x\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta}|G|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^d)}$ $\mathbb{P}$-p.s. Ainsi, dans le théorème 3.2.5, il est possible d'imposer à la fonction $\overline{\zeta}$ d'être bornée par $\frac{K_x}{\eta}|G|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^l,\mathbb{R}^d)}$.

Remarque 3.3.9. Supposons que ψ soit seulement lipschitzienne (et non pas de classe $\mathcal{C}^1$). Comme dans une remarque précédente, on peut considérer une suite d'applications $\psi_n \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^l,\mathbb{R}\right)$ telle que pour presque tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $z, z' \in \mathbb{R}^l$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\psi_n(x,z) - \psi_n(x',z')\right| \leqslant K_x|x-x'| + K_z|z-z'|, \qquad \psi_n(x,z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(x,z).$$

Si on note $\left(\overline{Y}^{x,n}, \overline{Z}^{x,n}, \lambda_n\right)$ la solution de l'EDSRE (3.2.8) avec ψ remplacée par ψ_n, alors $\left|\overline{Z}_t^{x,n}\right| \leqslant \frac{K_x}{\eta} |G|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^d)}$.
On peut alors montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\overline{Z}_t^{x,n} - \overline{Z}_t^x\right|^2 \mathrm{d}t\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\overline{Z}^x$ est ainsi borné, même si ψ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 3.3.10 (*Semi-groupe de Kolmogorov*)

Pour tout $t \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et pour toute fonction mesurable bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on pose :

$$P_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right].$$

$(P_t)_{t\geqslant 0}$ est appelé semi-groupe de Kolmogorov associé à X.

Définition 3.3.11 (*Semi-groupe fortement Feller*)

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est dit fortement Feller, si pour tout $t > 0$, il existe $k_t > 0$ tel que pour toute fonction mesurable bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on ait :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|P_t[\phi](x) - P_t[\phi](x')\right| \leqslant k_t \|\phi\|_\infty \left|x - x'\right|.$$

Lemme 3.3.12

On suppose que l'hypothèse 3.1.1 est vérifiée.
On note μ l'unique mesure invariante de X (voir le théorème 3.1.8).
Si le semi-groupe de Kolmogorov $(P_t)_{t\geqslant 0}$ est fortement Feller, alors, il existe $c > 0$ tel que, pour toute fonction mesurable bornée $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\left|P_t[\phi](x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{\eta t}{4}}(1 + |x|)\|\phi\|_\infty.$$

Démonstration :

→ Si $t \leqslant 2$, alors $\left|P_t[\phi](x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant 2\|\phi\|_\infty \leqslant 2\mathrm{e}^{\frac{\eta}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\eta t}{4}} \|\phi\|_\infty$.

→ Désormais $t \geqslant 2$.
Comme $X_t^{X_u^x}$ et X_{t+u}^x ont même loi, on a :

$$P_{t-1}\left[P_1[\phi]\right](x) = \mathbb{E}\left[P_1[\phi]\left(X_{t-1}^x\right)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi\left(X_{t-1}^{X_1^x}\right)\right]\right] = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right] = P_t[\phi](x).$$

Aussi, par invariance de μ, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^d} P_1[\phi] \,\mathrm{d}\mu.$$

Utilisant le théorème 3.1.8, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|P_t[\phi](x) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi \,\mathrm{d}\mu\right| &= \left|P_{t-1}\left[P_1[\phi]\right](x) - \int_{\mathbb{R}^d} P_1[\phi] \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant c(1 + |x|)\mathrm{e}^{-\frac{\eta(t-1)}{2}} \left\|P_1[\phi]\right\|_{\mathrm{lip}} \\ &\leqslant c\mathrm{e}^{-\frac{\eta t}{4}}(1 + |x|)\|\phi\|_\infty.\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.3.13

On se place sous les hypothèses 3.1.1 et 3.2.1. De plus, on suppose que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que ψ est bornée sur tous les ensembles de la forme $\mathbb{R}^d \times B$, où B parcourt l'ensemble des boules de $\mathbb{R}^l$.
On suppose que (P_t) est fortement Feller.
Alors on a :

$$\overline{\lambda} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(x, \overline{\zeta}(x)\right) \, \mu(\mathrm{d}x),$$

où μ désigne l'unique mesure invariante de X.

Démonstration :

On remarque que la fonction $\overline{\psi} : x \mapsto \psi\left(x, \overline{\zeta}(x)\right)$ est bornée.
Rappelons que

$$\overline{Y}_0^x = \overline{Y}_T^x + \int_0^T \left\{ \psi\left(X_t^x, \overline{Z}_t^x\right) - \overline{\lambda} \right\} \mathrm{d}t - \int_0^T \overline{Z}_t^x \,.\, \mathrm{d}W_t.$$

Ainsi, en opérant de la même manière qu'à la fin de la démonstration du théorème 3.2.7, on montre que :

$$\frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right) - \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi} \, \mathrm{d}\mu \right\} \mathrm{d}t\right] + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi} \, \mathrm{d}\mu - \overline{\lambda} \right) = \frac{\mathbb{E}\left[\overline{Y}_0^x - \overline{Y}_T^x\right]}{T} \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, par le lemme précédent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right) - \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi} \, \mathrm{d}\mu \right\} \mathrm{d}t\right] &= \frac{1}{T}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{ \overline{\psi}\left(X_t^x\right) - \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi} \, \mathrm{d}\mu \right\} \mathrm{d}t\right] \\
&\leqslant \frac{1}{T} \int_0^T c \mathrm{e}^{-\frac{\eta t}{4}} (1 + |x|) \left\|\overline{\psi}\right\|_\infty \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{c(1+|x|) \left\|\overline{\psi}\right\|_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\eta T}{4}}\right)}{T\frac{4}{\eta}} \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. ■

3.4 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique

On suppose dans cette section que $\overline{v} : x \mapsto \overline{Y}_0^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Notre objectif va être de montrer que le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ est une solution *mild* de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman "ergodique" :

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \nabla v(x) G\right) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.4.23}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur défini formellement de la façon suivante :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 f(x)\right) + \left\langle F(x), \nabla f(x)\right\rangle.$$

Pourquoi s'intéresse-t-on à cette équation ? En fait, elle dérive de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\partial_t u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) + \psi\left(x, \nabla_x u(t,x)\sigma(x)\right),$$

qui est reliée à l'équation KPZ déterministe (voir à ce sujet l'introduction de [CPX15]), qui apparaît dans la modélisation de certains phénomènes physiques. Dans la dernière section, on va voir que, sous des hypothèses différentes, la fonction u présente dans cette équation est équivalente (quand le temps t tend vers l'infini) à une fonction de x (appelons-la v) à laquelle on ajoute λt. Ici, faisons la conjoncture que l'approximation $u(t,x) \simeq v(x) + \lambda t$ soit légitime. Alors, en remplaçant $u(t,x)$ par $v(x) + \lambda t$, l'équation précédente se transforme en (3.4.23). Sous cette conjecture, on souhaite connaître v et λ pour avoir une idée de ce que peut être u.

Définition 3.4.1 (*Générateur infinitésimal*)

Soit $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une diffusion d'Itô satisfaisant l'EDS $\mathrm{d}X_t = b\left(X_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t\right)\mathrm{d}B_t$, où B est un mouvement brownien l-dimensionnel, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^d\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathbb{P}_x$ la loi de X quand on impose $X_0 = x$.
Le générateur infinitésimal de X est l'opérateur A défini par :

$$Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}_x\left[f\left(X_t\right)\right] - f(x)}{t}.$$

On remarque alors que $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal associé à l'EDS (3.1.1). Aussi, on peut étendre la définition de semi-groupe de Kolmogorov aux fonctions ϕ à croissance polynomiale (d'après la proposition 3.1.5).

Définition 3.4.2

On dit d'un couple (v, λ), où $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, qu'il est solution *mild* de l'équation (3.4.23) si :
- $v \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$;
- $\exists C > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$, $|\nabla v(x) h| \leqslant C|h|\left(1 + |x|^k\right)$;
- $\forall 0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $v(x) = P_{T-t}[v](x) + \int_t^T \left(P_{s-t}\left[\psi(\bullet, \nabla v(\bullet)G)\right](x) - \lambda\right)\mathrm{d}s$.

Remarque 3.4.3. On a : $P_t\left[\psi\left(\bullet, \nabla v(\bullet)G\right)\right](x) = \mathbb{E}\left[\psi\left(X_t^x, \nabla v\left(X_t^x\right)G\right)\right]$.
Remarque 3.4.4. Voici une intuition qui aide à comprendre la construction de la définition de solution *mild*. Comme $\mathcal{L}$ est le générateur de l'EDS (3.1.1), on peut faire l'approximation suivante quand t est proche de T :

$$\begin{aligned}
v(x) &\simeq \mathbb{E}\left[v\left(X_{T-t}^x\right)\right] - (T-t)\mathcal{L}v(x) \\
&\simeq \mathbb{E}\left[v\left(X_{T-t}^x\right)\right] - (T-t)\left(\lambda - \psi\left(x, \nabla v(x)\sigma(x)\right)\right) \\
&\simeq \mathbb{E}\left[v\left(X_{T-t}^x\right)\right] + \int_t^T \psi\left(x, \nabla v(x)\sigma(x)\right)\mathrm{d}s - \lambda(T-t) \\
&\simeq \mathbb{E}\left[v\left(X_{T-t}^x\right)\right] + \int_t^T \mathbb{E}\left[\psi\left(X_{s-t}^x, \nabla v\left(X_{s-t}^x\right)\sigma\left(X_{s-t}^x\right)\right)\right]\mathrm{d}s - \lambda(T-t),
\end{aligned}$$

la dernière approximation provenant d'un argument de continuité stochastique.

Théorème 3.4.5

On suppose vérifiées les hypothèses 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1.
Dans ce cas, le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ est solution de l'équation HJB (3.4.23).
Réciproquement, si (v, λ) est solution de (3.4.23), alors, en posant $Y_t^x = v\left(X_t^x\right)$ et $Z_t^x = \nabla v\left(X_t^x\right) G$, le triplet (Y^x, Z^x, λ) est solution de l'EDSRE (3.2.8).

Démonstration :

1. Montrons que le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ est une solution *mild* de l'équation (3.4.23). D'après le théorème 3.3.6, on sait que $\overline{v} \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$. Aussi, le paragraphe précédent le théorème 3.2.5 nous indique que $\overline{v}$ est $\dfrac{K_x}{\eta}$-lipschitzienne. Dès lors, on a la majoration : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall h \in \mathbb{R}^d$, $|\nabla\overline{v}(x)h| \leqslant \dfrac{K_x}{\eta}|x||h|$.
Il reste alors à montrer la dernière égalité de la définition d'une solution *mild* :
$$\begin{aligned}\int_t^T \left\{P_{s-t}\left[\psi\left(\bullet, \nabla\overline{v}\left(\bullet\right)G\right)\right](x) - \overline{\lambda}\right\} \mathrm{d}s &= \int_t^T \left\{\mathbb{E}\left[\psi\left(X_{s-t}^x, \nabla\overline{v}\left(X_{s-t}^x\right)G\right)\right] - \overline{\lambda}\right\} \mathrm{d}s \\ &\underset{3.3.7}{=} \int_t^T \left\{\mathbb{E}\left[\psi\left(X_{s-t}^x, \overline{Z}_{s-t}^x\right)\right] - \overline{\lambda}\right\} \mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t}\left\{\psi\left(X_u^x, \overline{Z}_u^x\right) - \overline{\lambda}\right\} \mathrm{d}u\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\overline{Y}_0^x - \overline{Y}_{T-t}^x + \int_0^{T-t} \overline{Z}_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s\right] \\ &= \overline{Y}_0^x - \mathbb{E}\left[\overline{Y}_{T-t}^x\right] = \overline{v}(x) - P_{T-t}[\overline{v}](x).\end{aligned}$$

2. Réciproquement, soit (v, λ) une solution *mild* de l'équation (3.4.23).
On pose $Y_t^x = v\left(X_t^x\right)$ et $Z_t^x = \nabla v\left(X_t^x\right)G$; on veut montrer que (Y^x, Z^x, λ) est une solution de l'EDSRE (3.2.8).
On a : $\forall 0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
$$\begin{aligned}Y_0^x = v(x) &= P_{T-t}[v](x) + \int_t^T \left\{P_{s-t}\left[\psi\left(\bullet, \nabla v(\bullet)G\right)\right](x) - \lambda\right\} \mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}\left[Y_{T-t}^x\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\{\psi\left(X_{s-t}^x, Z_{s-t}^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s\right].\end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\mathbb{E}\left[Y_t^x - Y_0^x + \int_0^t \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s\right] = 0$.
Par le théorème de représentation des martingales, on en déduit l'existence d'un processus prédictible $\widetilde{Z}$ de carré intégrable tel que :
$$Y_t^x - Y_0^x + \int_0^t \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s = \int_0^t \widetilde{Z}_s \,.\, \mathrm{d}W_s.$$
Y^x est donc une semi-martingale, dont la partie martingale est $\int_0^\bullet \widetilde{Z}_s \,.\, \mathrm{d}W_s$.
Supposons l'espace d'un instant que v soit de classe $\mathcal{C}^2$. La formule d'Itô permet alors de dire que la partie martingale de $v\left(X_\bullet^x\right)$ est $\int_0^\bullet \nabla v\left(X_s^x\right)G \,.\, \mathrm{d}W_s$ et l'unicité de la décomposition de Doob permet d'en déduire que : $\int_0^\bullet \widetilde{Z}_s \,.\, \mathrm{d}W_s = \int_0^\bullet \nabla v\left(X_s^x\right)G \,.\, \mathrm{d}W_s$.
Mais v n'est pas forcément de classe $\mathcal{C}^2$. Dans ce cas, on fixe $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$ à support compact K, et on pose $\varphi_n(x) = \int_K v\left(x_1 + \frac{y}{n}, \ldots, x_d + \frac{y}{n}\right) j\left(\frac{y}{n}\right) \mathrm{d}y$. On peut appliquer la formule d'Itô à φ_n et une utilisation répétée du théorème de convergence dominée permet de montrer que la partie martingale de la semi-martingale $v\left(X_\bullet^x\right)$ est toujours $\int_0^\bullet \nabla v\left(X_s^x\right)G \,.\, \mathrm{d}W_s$.
Ainsi :
$$Y_t^x - Y_0^x + \int_0^t \left\{\psi\left(X_s^x, Z_s^x\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}s = \int_0^t Z_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s.$$
On montre ainsi que le triplet (Y^x, Z^x, λ) est bien solution de l'EDSRE. ■

3.5 Contrôle ergodique optimal

Dans toute cette section, on suppose vérifiée l'hypothèse 3.1.1. Cela implique que l'EDS (3.1.1) admet une unique solution issue de $x \in \mathbb{R}^d$; on la note toujours X^x. On appelle *contrôle* tout processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, où $k > 0$.

Soit $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables ; on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$ et pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, on ait :

$$|R(u)| \leqslant c, \qquad |L(x,u)| \leqslant c \quad \text{ et } \quad |L(x,u) - L(x',u)| \leqslant c|x - x'|.$$

Pour tout contrôle u et pour tout $T > 0$, on pose $\rho_T^u = \exp\left(\int_0^T R\left(u_s\right) . \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|R\left(u_s\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)$, et la probabilité associée sur $\mathcal{F}_T$: $\mathbb{P}_T^u = \rho_T^u \mathbb{P}$. Le théorème de Girsanov (on rappelle que la fonction R est supposée bornée) nous dit alors que le processus $W_t^u = W_t - \int_0^t R\left(u_s\right) \mathrm{d}s$ est un $\mathbb{R}^l$-mouvement brownien sur $[0, T]$ sous la probabilité $\mathbb{P}_T^u$. On définit le coût ergodique associée au contrôle u et à la condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule :

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L\left(X_s^x, u_s\right) \mathrm{d}s\right].$$

Notre objectif va être de minimiser le coût sur l'ensemble des contrôles.

On note ψ le Hamiltonien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^l$ par :

$$\psi(x,z) = \inf_{u\in\mathbb{R}^k} \left\{L(x,u) + z \,.\, R(u)\right\}. \tag{3.5.24}$$

On montre assez facilement que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, l'application $(x,z) \mapsto L(x,u) + z \,.\, R(u)$ est c-lipschitzienne par rapport à x et z ; dès lors, la fonction ψ est elle-même c-lipschitzienne par rapport à x et z, en tant qu'infimum de fonctions lipschitziennes ayant une constante de Lipschitz commune.

L'hypothèse 3.2.1 est ainsi vérifiée et le théorème 3.2.5 nous indique l'EDSRE (3.2.8) admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$.

On peut montrer (voir à ce sujet le théorème 4 de [MW67]) que si, pour tout (x,z) l'infimum dans la définition précédente est atteint, alors il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, qui soit mesurable et telle que $\psi(x,z) = L(x, \gamma(x,z)) + z \,.\, R(\gamma(x,z))$.

Théorème 3.5.1

On se place sous l'hypothèse 3.1.1.
En outre, on suppose que le triplet (Y, Z, λ) est solution de l'EDSRE (3.2.8) pour un certain $x \in \mathbb{R}^d$; où Y est un processus continu progressivement mesurable, $Z \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^l\right)\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Enfin, on suppose qu'il existe une constante $c_x > 0$, dépendant éventuellement de x, telle que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\forall t \geqslant 0,\ |Y_t| \leqslant c_x\left(1 + |X_t^x|\right).$$

Alors :

(i) pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geqslant \lambda = \overline{\lambda}$;

(ii) si $L\left(X_t^x, u_t\right) + Z_t \,.\, R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, Z_t\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t \geqslant 0$, alors $J(x,u) = \lambda = \overline{\lambda}$;

(iii) si l'infimum est toujours atteint en (3.5.24), alors le contrôle $\overline{u}_t = \gamma\left(X_t^x, Z_t\right)$ vérifie $J\left(x, \overline{u}\right) = \overline{\lambda}$.

En particulier, pour la solution $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$ mentionnée ci-dessus, cela signifie que :

(iv) pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geqslant \overline{\lambda}$;

(v) si $L\left(X_t^x, u_t\right) + \overline{\zeta}\left(X_t^x\right) . R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour p.t. $t \geqslant 0$, alors $J(x,u) = \overline{\lambda}$;

(vi) si l'infimum est toujours atteint en (3.5.24), alors $\overline{u}_t = \gamma\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right)$ vérifie $J\left(x, \overline{u}\right) = \overline{\lambda}$.

Démonstration :

Comme $\left(Y, Z, \overline{\lambda}\right)$ est solution de l'EDSRE (3.2.8) :

$$-\mathrm{d}Y_t = \left\{\psi\left(X_t^x, Z_t\right) - \overline{\lambda}\right\}\mathrm{d}t - Z_t \,.\, \mathrm{d}W_t = \left\{\psi\left(X_t^x, Z_t\right) - \overline{\lambda}\right\}\mathrm{d}t - Z_t \,.\, \mathrm{d}W_t^u - Z_t \,.\, R\left(u_t\right)\mathrm{d}t.$$

En intégrant et en prenant l'espérance sous la loi $\mathbb{P}_T^u$, on obtient :

$$\mathbb{E}_T^u\left[Y_0 - Y_T\right] = \mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T \psi\left(X_t^x, Z_t\right)\mathrm{d}t\right] - \mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T Z_t \,.\, R\left(u_t\right)\mathrm{d}t\right] - T\overline{\lambda}.$$

En isolant $\overline{\lambda}$, on en déduit :

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[Y_T - Y_0\right] + \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T \left\{\psi\left(X_t^x, Z_t\right) - Z_t \,.\, R\left(u_t\right) - L\left(X_t^x, u_t\right)\right\}\mathrm{d}t\right] + \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T L\left(X_t^x, u_t\right)\mathrm{d}t\right] \tag{3.5.25}$$

$$\leqslant \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[Y_T - Y_0\right] + \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T L\left(X_t^x, u_t\right)\mathrm{d}t\right], \tag{3.5.26}$$

par définition de ψ comme infimum.
Mais $\left|\mathbb{E}_T^u\left[Y_T\right]\right| \leqslant \mathbb{E}_T^u\left[\left|Y_T\right|\right] \leqslant c_x\left(1 + \mathbb{E}_T^u\left[\left|X_t^x\right|\right]\right) \leqslant c_x'(1 + |x|)$. Ainsi :

$$\frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u\left[Y_0 - Y_T\right] \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\overline{\lambda} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \mathbb{E}_T^u\left[\int_0^T L\left(X_t^x, u_t\right)\mathrm{d}t\right] = J(x, u).$$

Si $L\left(X_t^x, u_t\right) + Z_t \,.\, R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, Z_t\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t \geqslant 0$, alors l'inégalité (3.5.26) devient une égalité et donc on obtient bien $\overline{\lambda} = J(x, u)$.
Enfin, si l'infimum existe toujours, le contrôle $\overline{u}$ réalise l'égalité mentionnée en (ii). ■

4 Étude sous des hypothèses plus faibles de stricte monotonie

Dans cette section, on abandonne notamment l'hypothèse de continuité de F qu'on remplace par $A+\Gamma$, où A est une matrice "strictement monotone" et Γ une application bornée mesurable. Dans l'introduction de l'EDSR, le principal changement réside dans le fait qu'on ne supposera plus ψ lipschitzienne en la première variable, alors que cette hypothèse nous a été utile à plusieurs reprises dans la section précédente : étude de la fonction $\overline{v}$, différentiabilité de Y ...

4.1 Une EDS

Comme toujours, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, W un mouvement brownien d-dimensionnel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ supposée vérifiant les conditions habituelles.

On considère ici l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= (AX_t + \Gamma(X_t))\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 &= x \end{cases}, \tag{4.1.1}$$

pour laquelle on formule les hypothèses suivantes.

Hypothèse 4.1.1

- $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est strictement monotone, au sens où

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \langle x, Ax\rangle \leqslant -\eta |x|^2$$

  et A est le générateur d'un semi-groupe de contractions $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{t\geqslant 0}$;
- $\Gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application bornée mesurable ;
- $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ est une application mesurable, globalement lipschitzienne, bornée et telle que $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ soit également bornée.

4.1.1 Résolution de l'EDS

Proposition 4.1.2

1. On suppose que Γ est globalement lipschitzienne.
   Alors, il existe un unique processus X^x solution forte de l'EDS (4.1.1) ; de plus, pour tout $p \in [2, +\infty[$ et pour tout $T > 0$, $X^x \in \mathrm{L}^p\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t^x|^p\right] \leqslant C(1+|x|)^p, \tag{4.1.2}$$

   où la constante $C > 0$ ne dépend que de p et $\|\Gamma\|_\infty$.
2. Si on suppose seulement que Γ est bornée et mesurable, alors la solution de (4.1.1) existe toujours, mais au sens faible : il existe un espace probabilisé filtré $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)\right)$, un $\widetilde{\mathbb{P}}$-mouvement brownien $\widetilde{W}$ et un processus $\widetilde{X}$ solution de (4.1.1) sur cet espace probabilisé muni de son mouvement brownien. La majoration (4.1.2) demeure vraie (en prenant l'espérance sous $\widetilde{\mathbb{P}}$) et une telle solution est unique en loi.

Démonstration :

1. Voir le théorème 7.4 de [DZ92].
2. Comme Γ et $\sigma(\bullet)^{-1}$ sont mesurables bornées, $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \sigma(X_s)^{-1}\Gamma(X_s)\,\mathrm{d}s$ est un mouvement brownien sous une loi $\widetilde{\mathbb{P}}$. Ainsi, sur l'espace $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}}, (\mathcal{F}_t)\right)$, l'équation se réécrit sous la forme

$\mathrm{d}X_t = AX_t\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t$. Comme σ est globalement lipschitzienne, cette équation admet une unique solution forte, ce qui permet à la fois d'obtenir l'existence d'une solution faible et l'unicité en loi pour le problème initial. ■

4.1.2 Dépendance de la solution vis-à-vis de sa condition initiale

Théorème 4.1.3

Quand on suppose que Γ est globalement lipschitzienne, alors on a l'estimation :

$$\exists \widehat{c} > 0,\ \exists \widehat{\nu} > 0,\ \forall \phi \in \mathrm{B}_b\left(\mathbb{R}^d\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\mathcal{P}_t[\phi](x) - \mathcal{P}_t[\phi](y)| \leqslant \widehat{c}\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu}t} \|\phi\|_\infty,$$

où on rappelle que $\mathcal{P}_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$.
On insiste sur le fait que $\widehat{c}$ et $\widehat{\nu}$ ne dépendent de Γ que via $\|\Gamma\|_\infty$.

Démonstration :

Étape 1 : obtenons une première majoration.

Par la formule d'Itô appliquée à l'EDS vérifiée par X^x, il vient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left\{2\langle AX_s^x + \Gamma\left(X_s^x\right), X_s^x\rangle + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \sigma\left(X_s^x\right)_{i,j}^2\right\} \mathrm{d}s\right].$$

Par le théorème de Tonelli, l'application $t \mapsto \mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right]$ est donc dérivable.
Aussi, on dispose de la majoration :

$$\langle AX_t^x + \Gamma\left(X_t^x\right), X_t^x\rangle \leqslant -\eta\,|X_t^x|^2 + \|\Gamma\|_\infty\,|X_t^x| \leqslant -\eta\,|X_t^x|^2 + \frac{1}{2}\left(\eta\,|X_t^x|^2 + \frac{\|\Gamma\|_\infty^2}{\eta}\right) \leqslant -\frac{\eta}{2}\,|X_t^x|^2 + \frac{\|\Gamma\|_\infty}{2\eta}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\eta t}\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right]\right) &= \mathrm{e}^{\eta t}\left(\eta\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] + \mathbb{E}\left[2\langle AX_t^x + \Gamma\left(X_t^x\right), X_t^x\rangle + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \sigma\left(X_t^x\right)_{i,j}^2\right]\right)\\ &\leqslant \mathrm{e}^{\eta t}\left(\frac{\|\Gamma\|_\infty}{\eta} + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \left\|\sigma_{i,j}\right\|_\infty^2\right).\end{aligned}$$

En intégrant cette relation, on obtient alors :

$$\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\eta t}}{\eta}\left(\frac{\|\Gamma\|_\infty}{\eta} + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \left\|\sigma_{i,j}\right\|_\infty^2\right).$$

On note $\kappa_1 = \dfrac{1}{\eta}\left(\dfrac{\|\Gamma\|_\infty}{\eta} + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \left\|\sigma_{i,j}\right\|_\infty^2\right)$.
On a ainsi :

$$\mathbb{E}\left[|X_t^x|^2\right] \leqslant \mathrm{e}^{-\eta t}|x|^2 + \kappa_1.$$

Clairement, la solution X^y issue de y vérifie une inégalité de la même forme.

Étape 2 : on fixe T et R deux réels strictement positifs, qu'on précisera par la suite. On définit les évènements $C_k^x = \left\{\sup_{t \in [0,T]} \left|X_{(k-1)T+t}^x\right| > R\right\}$, $C_k^y = \left\{\sup_{t \in [0,T]} \left|X_{(k-1)T+t}^y\right| > R\right\}$ et $B_k = \bigcap_{j=0}^{k} \left(C_j^x \cup C_j^y\right)$.

Par l'inégalité de Tchebychev puis la propriété de Markov, on a :

$$\mathbb{P}\left(C_{k+1}^x \middle| \mathcal{F}_{kT}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} \left|X_{kT+t}^x\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{kT}\right]}{R^2} \leqslant \frac{C\left(1 + \left|X_{kT}^x\right|^2\right)}{R^2},$$

où C est indépendant de R et T.

De même, $\mathbb{P}\left(C_{k+1}^y \middle| \mathcal{F}_{kT}\right) \leqslant \dfrac{C\left(1+\left|X_{kT}^y\right|^2\right)}{R^2}$.

Ainsi, on montre que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(B_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(\left(C_{k+1}^x \cup C_{k+1}^y\right) \cap B_k\right) &\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{C_{k+1}^x} + \mathbb{1}_{C_{k+1}^y} \middle| \mathcal{F}_{kT}\right] \mathbb{1}_{B_k}\right] \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\left(\frac{C}{R^2}\left|X_{kT}^x\right|^2 + \frac{C}{R^2}\left|X_{kT}^y\right|^2 + 2\frac{C}{R^2}\right)\mathbb{1}_{B_k}\right].\end{aligned}$$

Par l'étape 1, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_{(k+1)T}^x\right|^2 \mathbb{1}_{B_{k+1}}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left|X_{(k+1)T}^x\right|^2 \mathbb{1}_{B_k}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left|X_{(k+1)T}^x\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{kT}\right] \mathbb{1}_{B_k}\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{-\eta T}\left|X_{kT}^x\right|^2 + \kappa_1\right)\mathbb{1}_{B_k}\right].$$

On en déduit le triplet de majorations :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[\left|X_{(k+1)T}^x\right|^2 \mathbb{1}_{B_{k+1}}\right] \\ \mathbb{E}\left[\left|X_{(k+1)T}^y\right|^2 \mathbb{1}_{B_{k+1}}\right] \\ \mathbb{P}\left(B_{k+1}\right) \end{pmatrix} \leqslant \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\eta T} & 0 & \kappa_1 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\eta T} & \kappa_1 \\ \dfrac{C}{R^2} & \dfrac{C}{R^2} & \dfrac{2C}{R^2} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \mathbb{E}\left[\left|X_{kT}^x\right|^2 \mathbb{1}_{B_k}\right] \\ \mathbb{E}\left[\left|X_{kT}^y\right|^2 \mathbb{1}_{B_k}\right] \\ \mathbb{P}\left(B_k\right) \end{pmatrix}.$$

On fixe alors R et T de telle sorte que $\mathrm{e}^{-\eta T} = \dfrac{C}{R^2} = a$, où $a > 0$ sera fixé par la suite. Dès lors, les valeurs propres de la matrice A sont a et $\dfrac{3a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{a+8\kappa_1}}{2}$. Ces valeurs propres sont distinctes, ce sont des fonctions continues de a qui tendent vers 0 quand $a \to 0$.

Il nous est alors possible de fixer a suffisamment petit de telle sorte que A soit diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Dès lors, il existe une constante κ_2 (ne dépendant que de κ_1 et η) telle que $\mathbb{P}\left(B_k\right) \leqslant \kappa_2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$.

On définit alors un temps d'arrêt $\tau = \inf\left\{kT \middle| \sup_{t\in[0,T]}\left|X_{(k-1)T+t}^x\right| \leqslant R, \sup_{t\in[0,T]}\left|X_{(k-1)T+t}^y\right| \leqslant R\right\}$.

Dès lors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau \geqslant kT\right) &= \mathbb{P}\left(\forall j \in [\![0, k-1]\!], \sup_{t\in[0,T]}\left|X_{(j-1)T+t}^x\right| > R \text{ ou } \sup_{t\in[0,T]}\left|X_{(j-1)T+t}^y\right| > R\right) \\ &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k-1}\left(C_j^x \cup C_j^y\right)\right) = \mathbb{P}\left(B_{k-1}\right) \\ &\leqslant \kappa_2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1+|x|^2+|y|^2\right).\end{aligned}$$

Soit $\nu > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}^*$; par une transformation d'Abel, on montre la relation :

$$\sum_{k=0}^N \mathrm{e}^{\nu k T}\mathbb{P}\left(\tau = kT\right) = 1 + \left(1 - \mathrm{e}^{-\nu T}\right)\sum_{k=1}^N \mathrm{e}^{\nu k T}\mathbb{P}\left(\tau \geqslant kT\right) - \mathrm{e}^{\nu N T}\mathbb{P}\left(\tau \geqslant (N+1)T\right).$$

Quand $\nu < \dfrac{\ln 2}{T}$, un passage à la limite permet d'en déduire que :

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\nu\tau}\right] = 1 + \left(1-\mathrm{e}^{-\nu T}\right)\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{\nu k T}\mathbb{P}\left(\tau \geqslant kT\right) \leqslant 1 + \left(1-\mathrm{e}^{-\nu T}\right)\kappa_2\left(1+|x|^2+|y|^2\right)\mathrm{e}^{\nu T}\sum_{k=0}^\infty\left(\mathrm{e}^{\nu T}\frac{1}{2}\right)^k \tag{4.1.3}$$

$$\leqslant 1 + \left(\mathrm{e}^{\nu T} - 1\right)\kappa_2\left(1+|x|^2+|y|^2\right)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\nu T}\frac{1}{2}} \tag{4.1.4}$$

$$\leqslant \kappa_3\left(1+|x|^2+|y|^2\right), \tag{4.1.5}$$

où la constante κ_3 ne dépend que de κ_2 et ν.

Étape 3 : on va utiliser une méthode de couplage ; dans un premier temps, on va introduire une EDS auxiliaire.

On note $\mathcal{B}_R$ la boule fermée de $\mathbb{R}^d$, centrée en 0 et de rayon R ; soient $x, y \in \mathcal{B}_R$, avec $x \neq y$. On fixe $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma}$ deux fonctions bornées, globalement lipschitziennes, qui coïncident avec b et σ sur $\mathcal{B}_R$ et qui sont nulles hors de $\mathcal{B}_{R+1}$.

On note $\widetilde{X}^x$ le processus solution de l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widetilde{X}_t^x &= \widetilde{b}\left(\widetilde{X}_t^x\right) \mathrm{d}t + \widetilde{\sigma}\left(\widetilde{X}_t^x\right) \mathrm{d}W_t \\ \widetilde{X}_0^x &= x \end{cases}$$

Par unicité forte, on remarque que $X^x = \widetilde{X}^x$ jusqu'au premier instant où X^x sort de la boule $\mathcal{B}_R$.

Si on note $\widetilde{p}(x; t, \bullet)$ la densité de $\widetilde{X}_t^x$, d'après [Aro67] (les coefficients de l'EDS auxiliaire étant bornés) :

$$\frac{t^{-\frac{d}{2}}}{M} \exp\left(-\frac{\lambda|z-x|^2}{t}\right) \leqslant \widetilde{p}(x; t, z) \leqslant M t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\Lambda|z-x|^2}{t}\right),$$

où M, λ et Λ désignent des constantes positives, indépendantes de x. On a le même type d'encadrement pour la densité $\widetilde{p}(y; t, \bullet)$ et on peut écrire :

$$\frac{\widetilde{p}(y; t, z)}{\widetilde{p}(x; t, z)} \leqslant M^2 \exp\left(\frac{\lambda|z-x|^2}{t}\right).$$

On note $\widetilde{\mu}_x = \mathcal{L}\left(\widetilde{X}_T^x\right)$ et $\widetilde{\mu}_y = \mathcal{L}\left(\widetilde{X}_T^y\right)$; on a donc montré que ces deux lois sont équivalentes.

En outre, le processus $\widetilde{X}$ est borné par $R+1$, étant donné que $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma}$ sont nulles hors de $\mathcal{B}_{R+1}$; ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mu}_y}{\mathrm{d}\widetilde{\mu}_x}(z)\right)^3 \mathrm{d}\widetilde{\mu}_x(z) \leqslant M^2 \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{3\lambda}{T}\left|\widetilde{X}_T^x - x\right|^2\right)\right] \leqslant M^2 \exp\left(\frac{3\lambda}{T}(R+1+R)^2\right) =: \kappa_4 < \infty,$$

et κ_4 est une constante qui ne dépend que de M et λ — en particulier, elle ne dépend pas de x ou y.

Pour continuer, on va utiliser le lemme suivant (démontré dans [Mat02]).

Lemme 4.1.4

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilités sur un espace de Banach E.

On sait qu'il existe un couplage de variables aléatoires (Z_1, Z_2) de lois respectives μ_1 et μ_2 réalisant le minimum de la quantité $\mathbb{P}(Z_1 \neq Z_2)$ sur l'ensemble des couplages de μ_1 et μ_2.

On suppose que μ_1 et μ_2 sont équivalentes, et qu'en outre, il existe des constantes $p > 1$ et $C > 1$ telles que

$$\int_E \left(\frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu_1}\right)^{p+1} \mathrm{d}\mu_1 \leqslant C.$$

Alors, on a la minoration :

$$\mathbb{P}(Z_1 = Z_2) \geqslant \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{pC}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ce lemme nous fournit alors l'existence d'un couplage $\left(\widetilde{V}_T^{1,x,y}, \widetilde{V}_T^{2,x,y}\right)$ de lois $\widetilde{\mu}_x$ et $\widetilde{\mu}_y$, tel que $\mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,x,y} = \widetilde{V}_T^{2,x,y}\right) \geqslant \dfrac{1}{4\kappa_4}$.

Étape 4 : on construit désormais un couplage issu de n'importe quelle condition initiale pour l'EDS de départ.

Pour $t \in [0, T]$, on pose :

- quand $x = y$, $\left(V_t^{1,x,x}, V_t^{2,x,x}\right) = (X_t^x, X_t^x)$;
- quand $x \neq y$, $\left(V_t^{1,x,y}, V_t^{2,x,y}\right) = \left(X_t^x, \overline{X}_t^y\right)$, où $\overline{X}^y$ est la solution de l'EDS issue de y pour un mouvement brownien $\overline{W}$ indépendant de W.

On construit par récurrence un couplages des lois de X^x, X^y, $t \geqslant 0$, en posant, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, T]$:

$$\left(V_{nT+t}^{1,x,y}, V_{nT+t}^{2,x,y}\right) = \left(V_t^{1, V_{nT}^{1,x,y}, V_{nT}^{2,x,y}}, V_t^{2, V_{nT}^{1,x,y}, V_{nT}^{2,x,y}}\right).$$

(C'est la propriété de Markov qui justifie, par récurrence, qu'il s'agit bien d'un couplage des lois attendues.)
On définit une suite de temps d'arrêt :

$$L_m = \inf \left\{ l > L_{m-1} \middle| \sup_{t\in[0,T]} V^{1,x,y}_{(l-1)T+t} \leqslant R \text{ et } \sup_{t\in[0,T]} V^{2,x,y}_{(l-1)T+t} \leqslant R \right\},$$

avec $L_0 = 0$.
En appliquant la propriété de Markov à (4.1.5), on montre que, pour $\nu < \dfrac{\ln 2}{T}$:

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu(L_{m+1}-L_m)T} \middle| \mathcal{F}_{L_m T} \right] \leqslant \kappa_3 \left(1 + \left| V^{1,x,y}_{L_m T} \right|^2 + \left| V^{2,x,y}_{L_m T} \right|^2 \right).$$

Puis, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\nu L_{m+1} T} \right] &= \mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T} \mathbb{E}\left[e^{\nu(L_{m+1}-L_m)T} \middle| \mathcal{F}_{L_m T} \right] \right] \leqslant \kappa_3 \mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T} \left(1 + \left| V^{1,x,y}_{L_m T} \right|^2 + \left| V^{2,x,y}_{L_m T} \right|^2 \right) \right] \\ &\leqslant \kappa_3 \left(1 + 2R^2 \right) \mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T} \right].\end{aligned}$$

Conséquemment :

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu L_m T} \right] \leqslant \kappa_3^m \left(1 + 2R^2 \right)^{m-1} \left(1 + |x|^2 + |y|^2 \right).$$

Étape 5 : on pose $m_0 = \inf \left\{ m \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} = V^{2,x,y}_{L_m T} \right\}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(m_0 > m+1 | m_0 > m \right) \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(m_0 = m+1 | m_0 > m \right) \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{L_{m+1}T} = V^{2,x,y}_{L_{m+1}T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right) \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(V_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = V_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right) \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = \widetilde{V}_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right), \text{ par définition de } L_{m+1}\,; \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = \widetilde{V}_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}}, V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} = V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right) \\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = \widetilde{V}_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}}, V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \neq V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right) \\
&\quad = 1 - \mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} = V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right) \\
&\qquad - \mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = \widetilde{V}_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} \middle| V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \neq V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \right) \\
&\qquad\quad \times \mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \neq V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right).
\end{aligned}$$

Par l'étape 3 : $\mathbb{P}\left(\widetilde{V}_T^{1,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} = \widetilde{V}_T^{2,V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}, V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T}} \middle| V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \neq V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \right) \geqslant \dfrac{1}{4\kappa_4}$.
Si on note $p = \mathbb{P}\left(V^{1,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} = V^{2,x,y}_{(L_{m+1}-1)T} \middle| V^{1,x,y}_{L_m T} \neq V^{2,x,y}_{L_m T} \right)$, on a donc :

$$\mathbb{P}\left(m_0 > m+1 | m_0 > m \right) \leqslant 1 - p - \frac{1}{4\kappa_4}(1-p) = \left(1 - \frac{1}{4\kappa_4} \right)(1-p) \leqslant 1 - \frac{1}{4\kappa_4}.$$

Ainsi, on déduit de $\mathbb{P}\left(m_0 > m+1 \right) = \mathbb{P}\left(m_0 > m+1 | m_0 > m \right) \mathbb{P}\left(m_0 > m \right)$ que $\mathbb{P}\left(m_0 > m \right) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{4\kappa_4} \right)^m$.
Remarquons en particulier que ceci nous apprend que $m_0 < \infty$ p.s.

Étape 6 : soit $\gamma \in [0, \nu]$; par l'inégalité de Hölder,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma L_{m_0} T}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma L_m T} \mathbb{1}_{m_0 = m}\right] \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\nu L_m T}\right]^{\frac{\gamma}{\nu}} \mathbb{P}\left(m_0 = m\right)^{1-\frac{\gamma}{\nu}}$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left(\kappa_3^m \left(1 + 2R^2\right)^{m-1} \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)\right)^{\frac{\gamma}{\nu}} \left(1 - \frac{1}{4\kappa_4}\right)^{(m-1)\left(1-\frac{\gamma}{\nu}\right)}.$$

On choisit alors γ de sorte que $\left(1 - \dfrac{1}{4\kappa_4}\right)^{1-\frac{\gamma}{\nu}} \left(\kappa_3 \left(1 + 2R^2\right)\right)^{\frac{\gamma}{\nu}} < 1$.
Ainsi, on peut écrire $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma L_{m_0} T}\right] \leqslant \kappa_5 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right)$, où κ_5 ne dépend que de κ_3, κ_4 et ν.
On pose $n_0 = \inf\left\{k \middle| V_{kT}^{1,x,y} = V_{kT}^{2,x,y}\right\} \leqslant L_{m_0} + 1$.
Ainsi, $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma n_0 T}\right] \leqslant \kappa_5 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{\gamma T}$.
De plus, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(V_{kT}^{1,x,y} \neq V_{kT}^{2,x,y}\right) = \mathbb{P}\left(n_0 \geqslant k-1\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\gamma n_0 T}\right]}{\mathrm{e}^{\gamma(k-1)T}} \leqslant \kappa_5 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{\gamma(2-k)T}.$$

Puis, pour tout $t \in [0, T]$, on en déduit :

$$\mathbb{P}\left(V_{kT+t}^{1,x,y} \neq V_{kT+t}^{2,x,y}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(V_{kT}^{1,x,y} \neq V_{kT}^{2,x,y}\right) \leqslant \kappa_5 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{\gamma(2-k)T} \leqslant \kappa_6 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\gamma(kT+t)}.$$

En fin de compte, pour $\phi \in \mathrm{B}_b\left(\mathbb{R}^d\right)$, il vient :

$$|\mathcal{P}_t[\phi](x) - \mathcal{P}_t[\phi](y)| = \left|\mathbb{E}\left[\phi\left(V_t^{1,x,y}\right) - \phi\left(V_t^{2,x,y}\right)\right]\right| \leqslant 2\|\phi\|_\infty \mathbb{P}\left(V_t^{1,x,y} \neq V_t^{2,x,y}\right)$$
$$\leqslant 2\kappa_6 \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \|\phi\|_\infty \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

■

Corollaire 4.1.5

On suppose que Γ est une fonction bornée, mesurable et qu'il existe une suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions telles que :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Γ_n est globalement lipschitzienne ;
- $\sup\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d} |\Gamma_n(x)| < \infty$;
- (Γ_n) converge simplement vers Γ sur $\mathbb{R}^d$.

Alors le résultat précédent reste vrai (lorsque qu'on note $\mathcal{P}_t[\phi](x) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$, avec les notations de la proposition 4.1.2).

Démonstration :

On note $X^{n,x}$ la solution de l'EDS écrite avec Γ_n, issue de x au temps 0.
D'après le théorème 4.1.3, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \widehat{c}_n, \widehat{\nu}_n > 0, \forall \phi \in \mathrm{B}_b\left(\mathbb{R}^d\right), \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,y}\right)\right]\right| \leqslant \widehat{c}_n \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu}_n t} \|\phi\|_\infty.$$

Comme $\widehat{c}_n$ et $\widehat{\nu}_n$ ne dépendent de Γ_n que via $\|\Gamma_n\|_\infty$, et que la suite (Γ_n) est uniformément bornée, on a :

$$\exists \widehat{c}, \widehat{\nu} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \phi \in \mathrm{B}_b\left(\mathbb{R}^d\right), \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \left|\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] - \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,y}\right)\right]\right| \leqslant \widehat{c} \left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} t} \|\phi\|_\infty.$$

Notre objectif va être de passer à la limite ; montrons donc que $\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$.
Soit U le processus solution de l'EDS

$$U_t^x = \mathrm{e}^{tA} x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} \sigma\left(U_s^x\right) \mathrm{d}s.$$

Par Girsanov, on peut écrire :

$$X_t^{n,x} = \mathrm{e}^{tA} x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} \sigma\left(X_s^{n,x}\right) \mathrm{d}W_s^{(n)},$$

où $W_t^{(n)} = W_t + \int_0^t \sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1} \Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right) \mathrm{d}s$ est un m.b. sous la loi $\mathbb{P}^{(n)} = \rho_T^n\left(X^{n,x}\right)\mathbb{P}$ sur $[0,T]$ et où

$$\rho_t^n\left(X^{n,x}\right) = \exp\left(-\int_0^t \left\langle \sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1} \Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1} \Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right).$$

De même, on écrit :

$$X_t^x = \mathrm{e}^{tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\left(X_s^x\right) \mathrm{d}W_s^{(\infty)},$$

où $W_t^{(\infty)} = \widetilde{W}_t + \int_0^t \sigma\left(X_s^x\right)^{-1} \Gamma\left(X_s^x\right) \mathrm{d}s$ est un m.b. sous la loi $\mathbb{P}^{(\infty)} = \rho_T^\infty\left(X^x\right)\widetilde{\mathbb{P}}$ sur $[0,T]$ et où

$$\rho_t^\infty\left(X^x\right) = \exp\left(-\int_0^t \left\langle \sigma\left(X_s^x\right)^{-1} \Gamma\left(X_s^x\right), \mathrm{d}\widetilde{W}_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\sigma\left(X_s^x\right)^{-1} \Gamma\left(X_s^x\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right).$$

Ainsi, par unicité en loi des solutions des EDS, on a les égalités :

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] = \mathbb{E}^{(n)}\left[\rho_t^n\left(X^{n,x}\right)^{-1}\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\rho_t^n\left(U^x\right)^{-1}\phi\left(U_t^x\right)\right];$$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right] = \mathbb{E}^{(\infty)}\left[\rho_t^\infty\left(X^x\right)^{-1}\phi\left(X_t^x\right)\right] = \mathbb{E}\left[\rho_t^\infty\left(U^x\right)^{-1}\phi\left(U_t^x\right)\right].$$

Comme $\Gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{cvs}} \Gamma$ sur $\mathbb{R}^d$, on a bien $\rho_t^n\left(U^x\right)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \rho_t^\infty\left(U^x\right)^{-1}$. Il nous suffit donc de montrer que la famille $\left(\rho_t^n\left(U^x\right)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable pour montrer $\mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^{n,x}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{\mathbb{E}}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\rho_t^n\left(U^x\right)^{-1}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(2\int_0^t \left\langle \sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right), \mathrm{d}W_s\right\rangle + \int_0^t \left|\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \left\langle 4\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{4}\int_0^t \left|4\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\exp\left(5\int_0^t \left|\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t \left\langle 4\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \mathbb{E}\left[\exp\left(10\int_0^t \left|\sigma\left(X_s^{n,x}\right)^{-1}\Gamma_n\left(X_s^{n,x}\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\exp\left(10t\left\|\sigma^{-1}\right\|_\infty^2\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|\Gamma_n\right\|_\infty^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \exp\left(5t\left\|\sigma^{-1}\right\|_\infty^2\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|\Gamma_n\right\|_\infty^2\right)\right) < \infty,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille $\left(\rho_t^n\left(U^x\right)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans L^2 ! ■

4.1.3 Récurrence de la solution

Théorème 4.1.6

On suppose que l'application Γ vérifie les hypothèses du corollaire 4.1.5 qui précède.
Alors la solution de l'EDS (4.1.1) est récurrente au sens où :

$$\forall \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \text{ ouvert },\ \lim_{T\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}\left(\exists t \in [0,T],\ X_t^x \in \mathcal{O}\right) = 1.$$

En particulier, si on pose $\tau^x = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid |X_t^x| < \varepsilon\}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{T\to\infty} \widetilde{\mathbb{P}}\left(\tau^x < T\right) = 1$.

Démonstration :

On introduit le semi-groupe $\mathcal{R}_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(U_t^x\right)\right]$, où U^x est le processus solution de

$$U_t^x = \mathrm{e}^{tA}x + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\sigma\left(U_s^x\right)\mathrm{d}s.$$

Pour $\mathcal{O} \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on note $\mathcal{R}(t,x,\mathcal{O}) = \mathbb{P}\left(U_t^x \in \mathcal{O}\right) = \mathcal{R}_t\left[\mathbb{1}_{\mathcal{O}}\right](x)$ les probabilités de transition de U.
En opérant comme dans la démonstration du théorème 3.1.8, on montre que $\mathcal{R}$ admet une unique mesure invariante $\overline{\mu}$, que $\overline{\mu}$ est fortement mélangeante, et que $\mathcal{R}$ est irréductible et t-régulier pour tout $t > 0$ (voir à ce titre les théorèmes 7.2.1 et 7.3.1 de [DZ96]).
On rappelle que les probabilités de transition de X sont $\mathcal{P}(t,x,\mathcal{O}) = \widetilde{\mathbb{P}}\left(X_t^x \in \mathcal{O}\right) = \mathcal{P}_t\left[\mathbb{1}_{\mathcal{O}}\right](x)$.
Par le théorème de Girsanov, on peut écrire :

$$\mathcal{P}_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\rho_T^x\phi\left(U_t^x\right)\right],$$

où $\rho_T^x = \exp\left(-\int_0^t \left\langle \sigma\left(U_s^x\right)^{-1}\Gamma\left(U_s^x\right), \mathrm{d}W_s\right\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\sigma\left(U_s^x\right)^{-1}\Gamma\left(U_s^x\right)\right|^2 \mathrm{d}s\right)$.
Ainsi, $\mathcal{P}$ est irréductible, t-régulier pour tout $t > 0$, et stochastiquement continu.
À la manière du théorème 8.4.4 de [DZ96], $\mathcal{P}$ admet une unique mesure invariante telle que $\mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}\overline{\mu}$, où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable.
On peut alors appliquer le théorème de Doob (théorème 4.2.1 dans [DZ96]) pour dire que μ est fortement mélangeante et équivalente à toutes les mesures $\mathcal{P}(t,x,\bullet)$.
Ainsi, comme $\mathcal{P}$ est irréductible, si $\mathcal{O}$ est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$, alors $\mu(\mathcal{O}) > 0$.
Donc $\liminf_{t\to\infty} \mathcal{P}(t,x,\mathcal{O}) = \mu(\mathcal{O}) > 0$.
On a donc montré que le semi-groupe $\mathcal{P}$ est récurrent, donc $\widetilde{\mathbb{P}}\left(\exists t > 0,\, X_t^x \in \mathcal{O}\right) = 1$. ■

4.2 L'EDSRE

Ici, on désigne par $\Xi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction bornée ; et on note X^x la solution de l'EDS (4.1.1), où Γ est remplacée par Ξ.

On s'intéresse alors à l'EDSR ergodique d'horizon infini :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^x\right) - \lambda\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^x \, . \, \mathrm{d}W_\sigma, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{4.2.6}$$

où les inconnues sont $\lambda \in \mathbb{R}$ et les processus Y^x et Z^x à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ respectivement.

On fait les hypothèses suivantes sur Ξ et ψ.

Hypothèse 4.2.1

La fonction $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, mesurable ; de plus, on suppose qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall z, z' \in \mathbb{R}^d, \ |\psi(x,0)| \leqslant M \quad \text{et} \quad |\psi(x,z) - \psi(x,z')| \leqslant M|z - z'|.$$

Hypothèse 4.2.2

La fonction $\Xi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, globalement lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right)$.

Comme pour l'étude précédente, on commence par introduire une EDSR à horizon fini, faisant apparaître un nouveau paramètre $\alpha > 0$:

$$Y_t^{x,\alpha} = Y_T^{x,\alpha} + \int_t^T \left[\psi\left(X_\sigma^{x,\alpha}, Z_\sigma^{x,\alpha}\right) - \alpha Y_\sigma^{x,\alpha}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_t^T Z_\sigma^{x,\alpha} \, . \, \mathrm{d}W_\sigma, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty. \tag{4.2.7}$$

Pour cette équation, on dispose du résultat suivant.

Lemme 4.2.3

On se place dans le cadre des hypothèses 4.1.1, 4.2.1 et 4.2.2. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\alpha > 0$,

1. il existe une unique solution $\left(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha}\right)$ à l'EDSR (4.2.7) telle que $Y^{x,\alpha}$ soit un processus borné et continu, $Z^{x,\alpha} \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0,\infty; \mathbb{R}^d\right)\right)$ et $|Y_t^{x,\alpha}| \leqslant \dfrac{M}{\alpha}$ $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \geqslant 0$;
2. si on pose $v^\alpha(x) := Y_0^{x,\alpha}$, alors pour tout $\alpha > 0$, v^α est une fonction de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$; elle vérifie $Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha\left(X_t^x\right)$ et $Z_t^{x,\alpha} = \nabla v^\alpha\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$.

Démonstration :

1. La première partie de ce lemme se montre exactement de la même manière que le théorème 3.2.2. En effet, dans la démonstration de ce résultat, on n'utilise à aucun moment l'hypothèse selon laquelle ψ serait globalement lipschitzienne par rapport à x.
2. Par contre, le résultat similaire qu'on avait montré précédemment utilisait pleinement le fait que ψ soit globalement lipschitzienne par rapport à la première variable. On va donc devoir opérer différemment.

   $\to$ On va commencer par montrer que $v^\alpha : x \mapsto Y_0^{x,\alpha}$ est une fonction continue. Comme dans la démonstration du théorème 3.2.2, on introduit l'EDSR à horizon fini suivante :

   $$Y_t^{x,n} = \int_{t\wedge n}^n \left[\psi\left(X_\sigma^x, Z_\sigma^{x,n}\right) - \alpha Y_\sigma^{x,n}\right] \mathrm{d}\sigma - \int_{t\wedge n}^n Z_\sigma^{x,n} \, . \, \mathrm{d}W_\sigma, \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{4.2.8}$$

   Soit alors $(x_m)_{m\geqslant 0}$ une suite qui tend vers x dans $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$|v^\alpha(x_m) - v^\alpha(x)| \leqslant \left|Y_0^{x_m,\alpha} - Y_0^{x_m,n}\right| + \left|Y_0^{x_m,n} - Y_0^{x,n}\right| + \left|Y_0^{x,n} - Y_0^{x,\alpha}\right| .$$

Mais, comme dans le point (iii) de la démonstration de l'existence du théorème 3.2.2, on a :

$$\forall t \geqslant 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \left| Y_t^{\xi,\alpha} - Y_t^{\xi,n} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(n-t)} \frac{M}{\alpha}.$$

Ainsi, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|v^\alpha(x_m) - v^\alpha(x)| \leqslant \left| Y_0^{x_m,n} - Y_0^{x,n} \right| + 2\mathrm{e}^{-\alpha n} \frac{M}{\alpha}.$$

On fait alors appel à un résultat apparaissant dans la démonstration des estimées *a priori* de [EPQ97] (proposition 2.1), pour obtenir ici :

$$\forall \beta \geqslant l^2 + 3l + 1, \forall t \in [0,n], \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\beta t} \left| Y_t^{x_m,n} - Y_t^{x,n} \right|^2 \right] \leqslant \mathbb{E}\left[\int_t^n \mathrm{e}^{\beta s} \left| \psi(X_s^{x_m}, Z_s^{x,n}) - \psi(X_s^x, Z_s^{x,n}) \right|^2 \mathrm{d}s \right].$$

On en déduit que :

$$\left| Y_0^{x_m,n} - Y_0^{x,n} \right|^2 \leqslant \mathbb{E}\left[\int_0^n \mathrm{e}^{\beta s} \left| \psi(X_s^{x_m,n}, Z_s^{x,n}) - \psi(X_s^{x,n}, Z_s^{x,n}) \right|^2 \mathrm{d}s \right].$$

Mais, d'après l'hypothèse 4.2.1, on a : $\left| \psi(X_s^{x_m,n}, Z_s^{x,n}) - \psi(X_s^{x,n}, Z_s^{x,n}) \right| \leqslant 2l\left(1 + |Z_s^{x,n}|\right)$; d'après la première partie de ce lemme, cette quantité est donc de carré intégrable. Par convergence dominée, les applications ψ et $x \mapsto X^x$ étant continues, on a :

$$Y_0^{x_m,n} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} Y_0^{x,n}.$$

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit :

$$\limsup_{m\to\infty} |v^\alpha(x_m) - v^\alpha(x)| \leqslant 2\mathrm{e}^{-\alpha n} \frac{M}{\alpha}.$$

Finalement, $v^\alpha(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v^\alpha(x)$ et la fonction v^α est continue.

→ Ainsi, comme pour la proposition 3.2.4, on montre que pour tout $t \geqslant 0$, $Y_t^{x,\alpha} = v^\alpha(X_t^x)$ $\mathbb{P}$-p.s.

→ On peut alors démontrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de v^α en utilisant le théorème 3.1 de [MZ02] ; on obtient également la formule reliant Z à ∇v^α. ∎

Lemme 4.2.4

Soit $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application continue en la première variable et globalement lipschitzienne en la seconde.
Soient $\zeta, \zeta' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions continues à croissance polynomiale. On définit :

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,\zeta(x)) - f(x,\zeta'(x))}{|\zeta(x) - \zeta'(x)|^2}(\zeta(x) - \zeta'(x)), & \text{si } \zeta(x) \neq \zeta'(x); \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on peut construire une suite de fonctions globalement lipschitziennes $\left(\widetilde{\Gamma}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\| \widetilde{\Gamma}_n \right\|_\infty < \infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\Gamma}_n(x) = \widetilde{\Gamma}(x)$.

Démonstration :

On renvoie au lemme 3.5 de [DHT10]. ∎

Lemme 4.2.5

Il existe une constante c, dépendant de M, $\widehat{c}$ et $\widehat{\nu}$ mais pas de α telle que :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \left| v^\alpha(x) - v^\alpha(x') \right| \leqslant c\left(1 + |x|^2 + |x'|^2\right) \quad \text{et} \quad |\nabla v^\alpha(x)| \leqslant c\left(1 + |x|^2\right).$$

Démonstration :

On pose $\widetilde{\Gamma}^\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\psi(x,\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)) - \psi(x,0)}{|\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)|^2}\nabla v^\alpha(x)\sigma(x)', & \text{si } \nabla v^\alpha(x)\sigma(x) \neq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Par le lemme précédent, $\widetilde{\Gamma}^\alpha$ est limite ponctuelle d'une suite de fonctions uniformément bornées et globalement lipschitziennes.

Comme $Z_t^{x,\alpha} = \nabla v^\alpha\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$, on a bien : $\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right) = \psi\left(X_t^x,0\right) + \widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right)Z_t^{x,\alpha}$.

Aussi, pour tout $T>0$, le couple $(Y^{x,\alpha}, Z^{x,\alpha})$ est solution sur $[0,T]$ de :

$$\begin{cases} -\mathrm{d}Y_t^{x,\alpha} = \left[\psi\left(X_t^x,0\right) + \widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right)Z_t^{x,\alpha} - \alpha Y_t^{x,\alpha}\right]\mathrm{d}t - Z_t^{x,\alpha}.\mathrm{d}W_t \\ Y_T^{x,\alpha} = v^\alpha\left(X_T^x\right) \end{cases} \tag{4.2.9}$$

Comme $\widetilde{\Gamma}^\alpha$ est bornée (par M), il existe (d'après Girsanov) une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}^{x,\alpha,T}$ telle que

$$\widehat{W}_t^{x,\alpha} := W_t - \int_0^t \widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_s^x\right)\mathrm{d}s$$

est un $\widehat{\mathbb{P}}^{x,\alpha,T}$-m.b. sur $[0,T]$.

En intégrant (4.2.9) et en prenant l'espérance sous $\widehat{\mathbb{P}}^{x,\alpha,T}$, on montre alors que :

$$Y_0^{x,\alpha} - \widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\mathrm{e}^{-\alpha T}Y_T^{x,\alpha}\right] = \widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^x,0\right)\mathrm{d}t\right].$$

Ainsi, $v^\alpha(x) = \widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\mathrm{e}^{-\alpha T}v^\alpha\left(X_T^x\right) + \int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^x,0\right)\mathrm{d}t\right]$. Or, en faisant apparaître la densité de Girsanov, on remarque que :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\mathrm{e}^{-\alpha T}v^\alpha\left(X_T^x\right)\right] &= \mathrm{e}^{-\alpha T}\mathbb{E}\left[v^\alpha\left(X_T^x\right)\exp\left(\int_0^T \widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right).\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T\left|\widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right] \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha T}\frac{M}{\alpha}\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T \widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right).\mathrm{d}W_t - \frac{1}{2}\int_0^T\left|\widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right)\right|^2\mathrm{d}t\right)\right] \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha T}\frac{M}{\alpha} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

En fin de compte, on a montré que

$$v^\alpha(x) = \lim_{T\to\infty}\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^x,0\right)\mathrm{d}t\right].$$

D'autre part, on a :

$$\mathrm{d}X_t^x = \left[AX_t^x + \Xi\left(X_t^x\right) + \sigma\left(X_t^x\right)\widetilde{\Gamma}^\alpha\left(X_t^x\right)\right]\mathrm{d}t + \sigma\left(X_t^x\right).\mathrm{d}\widehat{W}^{x,\alpha,T}.$$

Comme Ξ et σ sont globalement lipschitziennes, l'application $\Gamma^\alpha = \Xi + \sigma\widetilde{\Gamma}^\alpha$ est limite simple de fonctions lipschitziennes. Par le corollaire 4.1.5, il vient :

$$\left|\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^x,0\right)\right] - \widehat{\mathbb{E}}^{x',\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^{x'},0\right)\right]\right| \leqslant \widehat{c}\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)\mathrm{e}^{-\widehat{\nu}t}\|\psi(\bullet,0)\|_\infty \leqslant \widehat{c}M\mathrm{e}^{-\widehat{\nu}t}\left(1+|x|^2+|x'|^2\right).$$

En conséquence, on a :

$$\begin{aligned} \left|v^\alpha(x) - v^\alpha(x')\right| &= \lim_{T\to\infty}\left|\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^x,0\right)\mathrm{d}t\right] - \widehat{\mathbb{E}}^{x',\alpha,T}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\psi\left(X_t^{x'},0\right)\mathrm{d}t\right]\right| \\ &= \lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,T}\left[\psi\left(X_t^x,0\right)\right]\mathrm{d}t - \int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\widehat{\mathbb{E}}^{x',\alpha,T}\left[\psi\left(X_t^{x'},0\right)\right]\mathrm{d}t\right| \\ &= \lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^x,0\right)\right] - \widehat{\mathbb{E}}^{x',\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^{x'},0\right)\right]\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left|\widehat{\mathbb{E}}^{x,\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^x,0\right)\right] - \widehat{\mathbb{E}}^{x',\alpha,t}\left[\psi\left(X_t^{x'},0\right)\right]\right|\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|v^{\alpha}(x)-v^{\alpha}(x')\right| &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\widehat{c}M\mathrm{e}^{-\widehat{\nu}t}\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\widehat{c}M}{\widehat{\nu}+\alpha}\left(1+|x|^2+|x'|^2\right) \\ &\leqslant \frac{\widehat{c}M}{\widehat{\nu}}\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)\end{aligned}$$

Rappelons que $\widehat{c}$ et $\widehat{\nu}$ ne dépendent de Γ^{α} que via $\|\Gamma^{\alpha}\|_{\infty} \leqslant \|\Xi\|_{\infty} + \|\sigma\|_{\infty}M$, autrement dit $\widehat{c}$ et $\widehat{\nu}$ sont indépendants de α.
Pour établir la majoration de $|\nabla v^{\alpha}(x)|$, on pose désormais $\overline{v}^{\alpha}(x) := v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$; ainsi le processus défini par $\overline{Y}_t^{x,\alpha} := Y_t^{x,\alpha} - Y_0^{0,\alpha} = \overline{v}^{\alpha}\left(X_t^x\right)$ est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} -\mathrm{d}\overline{Y}_t^{x,\alpha} = \left[\psi\left(X_t^x, Z_t^{x,\alpha}\right) - \alpha\left(\overline{Y}_t^{x,\alpha} - Y_0^{0,\alpha}\right)\right]\,\mathrm{d}t - Z_t^{x,\alpha}\,.\,\mathrm{d}W_t \\ \overline{Y}_1^{x,\alpha} = \overline{v}^{\alpha}\left(X_1^x\right)\end{array}\right.$$

En remarquant que $\left|\alpha Y_0^{0,\alpha}\right| = |\alpha v^{\alpha}(0)| \leqslant M$, on peut appliquer le théorème 4.2 de l'article [FT02a] : on montre ainsi que $\overline{v}^{\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $|\nabla\overline{v}^{\alpha}(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$, où c ne dépend pas de α. ■

Théorème 4.2.6

On se place dans le cadre des hypothèses 4.1.1, 4.2.1 et 4.2.2. Il existe un réel $\overline{\lambda}$, une fonction localement lipschitzienne $\overline{v}$ avec $\overline{v}(0) = 0$ et un processus $\overline{Z}^x \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^d\right)\right)$ tels que, si on pose $\overline{Y}_t^x = \overline{v}\left(X_t^x\right)$, alors l'EDSRE admet une solution $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$.
De plus, si $\overline{v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $|\nabla\overline{v}(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$ (pour une certaine constante c) et dans ce cas $\overline{Z}_t^x = \nabla\overline{v}\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$.

Démonstration :

On opère comme dans la démonstration du théorème 3.2.5.
On pose $\overline{v}^{\alpha}(x) = v^{\alpha}(x) - v^{\alpha}(0)$; on a : $|\overline{v}^{\alpha}(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$, avec c indépendant de α et $|\alpha v^{\alpha}(0)| \leqslant M$.
Par extraction diagonale, on peut construire une suite (α_n) décroissant vers 0 telle que pour tout $x \in D$, partie dénombrable dense de $\mathbb{R}^d$, on ait :

$$\overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x) \quad \text{et} \quad \alpha_n v^{\alpha_n}(0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda},$$

pour une certaine fonction $\overline{v} : D \to \mathbb{R}$ et un certain réel $\overline{\lambda}$.
De plus, on a montré que :

$$\forall\alpha > 0,\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^d,\ \left|\overline{v}^{\alpha}(x) - \overline{v}^{\alpha}(x')\right| \leqslant c\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'|.$$

Donc on peut étendre $\overline{v}$ en une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ (car uniformément continue sur tout compact de D) ; elle est localement lipschitzienne et elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \left|\overline{v}(x) - \overline{v}(x')\right| \leqslant c\left(1+|x|^2+|x'|^2\right)|x-x'| \text{ et } \overline{v}^{\alpha_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}(x).$$

Pour montrer que le triplet $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$ est effectivement solution de l'EDSRE (4.2.6), il suffit de mimer la démonstration du théorème 3.2.5.
Pour le dernier point, on remarque que le couple $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x\right)$ est l'unique solution de l'EDSR :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\mathrm{d}\overline{Y}_t^x &=& \left[\psi\left(X_t^x, \overline{Z}_t^x\right) - \overline{\lambda}\right]\mathrm{d}t - \overline{Z}_t^x\,.\,\mathrm{d}W_t \\ \overline{Y}_1^x &=& \overline{v}\left(X_1^x\right)\end{array}\right.$$

avec la fonction $\overline{v}$ qui est supposée de classe $\mathcal{C}^1$.
Comme dans la preuve du théorème précédent, on fait appel au théorème 4.2 de [FT02a], pour conclure que $|\nabla\overline{v}(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$ et $\overline{Z}_t^x = \nabla\overline{v}\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$. ■

Remarque 4.2.7. La solution qu'on vient de construire vérifie :

$$\forall t \geqslant 0, \left|\overline{Y}_t^x\right| \leqslant c\left(1+|X_t^x|^2\right).$$

Le théorème qui suit va permettre de montrer l'unicité de λ, quand on impose à Y de croître au plus polynomialement par rapport à X.

Théorème 4.2.8

On se place dans le cadre des hypothèses 4.1.1, 4.2.1 et 4.2.2.
Aussi, on suppose que le triplet (Y', Z', λ') est solution de l'EDSRE (3.2.8) pour une certaine condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$, où Y' est un processus continu et progressivement mesurable, Z' est un élément de $L^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, L^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^d\right)\right)$ et $\lambda' \in \mathbb{R}$.
Enfin, on suppose qu'il existe une constante $c_x > 0$ (qui peut donc dépendre éventuellement de x), telle que pour un certain $p \geqslant 1$, $\mathbb{P}$-p.s.

$$\forall t \geqslant 0, \left|Y_t'\right| \leqslant c_x\left(1+|X_t^x|^p\right).$$

Dans ces conditions, on a alors $\lambda' = \overline{\lambda}$.

Démonstration :
Elle est similaire à celle du théorème 3.2.7. ■

Théorème 4.2.9

Soient (v,ζ) et $\left(\widetilde{v},\widetilde{\zeta}\right)$ deux couples de fonctions telles que :

- $v, \widetilde{v} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont continues et nulles en 0 ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|v(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$ et $|\widetilde{v}(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$;
- $\zeta, \widetilde{\zeta} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont continues ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|\zeta(x)| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$ et $\left|\widetilde{\zeta}(x)\right| \leqslant c\left(1+|x|^2\right)$.

On suppose que pour certaines constantes $\lambda, \widetilde{\lambda}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\left(v\left(X_t^x\right), \zeta\left(X_t^x\right), \lambda\right)$ et $\left(\widetilde{v}\left(X_t^x\right), \widetilde{\zeta}\left(X_t^x\right), \widetilde{\lambda}\right)$ soient solutions de l'EDSRE (4.2.6).
Alors, $\lambda = \widetilde{\lambda}$, $v = \widetilde{v}$ et $\zeta = \widetilde{\zeta}$.

Démonstration :
Par le théorème précédent, on sait déjà que $\lambda = \widetilde{\lambda}$. On pose : $\overline{Y}_t^x = v\left(X_t^x\right) - \widetilde{v}\left(X_t^x\right)$, $\overline{Z}_t^x = \zeta\left(X_t^x\right) - \widetilde{\zeta}\left(X_t^x\right)$ et

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x,\zeta(x)) - \psi\left(x,\widetilde{\zeta}(x)\right)}{\left|\zeta(x)-\widetilde{\zeta}(x)\right|^2}\left(\zeta(x) - \widetilde{\zeta}(x)\right) & \text{si } \zeta(x) \neq \widetilde{\zeta}(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Utilisant le fait qu'on manipule des solutions de l'EDSRE (4.2.6), on a :

$$-\mathrm{d}\overline{Y}_t^x = \widetilde{\Gamma}\left(X_t^x\right) . \overline{Z}_t^x \,\mathrm{d}t - \overline{Z}_t^x . \mathrm{d}W_t = -\overline{Z}_t^x . \mathrm{d}W_t',$$

où $W_t' = W_t - \int_0^t \widetilde{\Gamma}\left(X_s^x\right) \mathrm{d}s$ est un mouvement brownien sur $[0,T]$ sous une loi $\overline{\mathbb{P}}^{x,T}$ (par Girsanov, car $\widetilde{\Gamma}$ est bornée par M).
De plus, sous la probabilité $\overline{\mathbb{P}}^{x,T}$, le processus X^x satisfait l'EDS (4.1.1) sur $[0,T]$ avec Γ remplacée par la fonction $x \mapsto \sigma(x)\widetilde{\Gamma}(x) + F(x)$, qui est une fonction bornée par $\|\sigma\|_\infty M + \|F\|_\infty$.
Par la proposition 4.1.2, on a alors :

$$\forall p \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall 0 \leqslant t \leqslant T, \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[|X_t^x|^p\right] \leqslant C_p\left(1+|x|^p\right),$$

où C_p ne dépend que de p et $\|\sigma\|_\infty M + \|F\|_\infty$; en particulier, elle est indépendante de T.

Et comme $\left|\overline{Z}_t^x\right| \leqslant 2c\left(1+|X_t^x|^2\right)$, on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\int_0^T \left|\overline{Z}_t^x\right|^2 \mathrm{d}t\right] &\leqslant \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\int_0^T 4c^2\left(2+2\,|X_t^x|^4\right)\,\mathrm{d}t\right]\\
&\leqslant 8c^2T + 8c^2\int_0^T \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[|X_t^x|^4\right]\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant 8c^2T + 8c^2C_4T\left(1+|x|^4\right)
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on définit le temps d'arrêt $\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \,|\, |X_t^x| < \varepsilon\}$.
De $-\mathrm{d}\overline{Y}_t^x = -\overline{Z}_t^x \,.\, \mathrm{d}W_t'$, on déduit :

$$\forall T > 0,\ \overline{Y}_0^x = \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\overline{Y}_{T\wedge\tau}^x\right].$$

Mais comme $v - \widetilde{v}$ est continue et nulle en 0, on a :

$$\forall \delta > 0,\ \exists \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |(v-\widetilde{v})\,(x)| \leqslant \delta.$$

On fixe $\delta > 0$, et on a la suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}
\left|\overline{Y}_0^x\right| &\leqslant \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\left|\overline{Y}_{T\wedge\tau}^x\right|\right] \leqslant \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\left|\overline{Y}_{T\wedge\tau}^x\right|\mathbb{1}_{\tau<T}\right] + \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\left|\overline{Y}_{T\wedge\tau}^x\right|\mathbb{1}_{\tau\geqslant T}\right]\\
&\leqslant \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[|(v-\widetilde{v})\,(X_{T\wedge\tau}^x)|\,\mathbb{1}_{\tau<T}\right] + \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\left|\overline{Y}_T^x\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\mathbb{1}_{\tau\geqslant T}^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta + \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[\left|\overline{Y}_{T\wedge\tau}^x\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbb{P}}^{x,T}(\tau \geqslant T)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \delta + \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[4c^2\left(1+|X_T^x|^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbb{P}}^{x,T}(\tau \geqslant T)^{\frac{1}{2}} \leqslant \delta + \overline{\mathbb{E}}^{x,T}\left[8c^2+8c^2\,|X_T^x|^4\right]^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbb{P}}^{x,T}(\tau \geqslant T)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \delta + \left(8c^2+8c^2C_4\left(1+|x|^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}\overline{\mathbb{P}}^{x,T}(\tau \geqslant T)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Mais, par le théorème 4.1.6, on a :

$$\overline{\mathbb{P}}^{x,T}(\tau \geqslant T) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\left|\overline{Y}_0^x\right| \leqslant \delta$, et δ est arbitraire, donc $\overline{Y}_0^x = 0$. On a ainsi montré que $v = \widetilde{v}$. Par une formule d'Itô, on en déduit que $\zeta = \widetilde{\zeta}$. ■

4.3 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique

Comme dans la section précédente, on s'intéresse à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ergodique. La méthode d'étude étant la même, on ne fait ici que rappeler les résultats principaux.

On suppose dans cette section que $\overline{v} : x \mapsto \overline{Y}_0^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, où $\left(\overline{Y}^x, \overline{Z}^x, \overline{\lambda}\right)$ est une solution de l'EDSRE (4.2.6). Notre objectif va être de montrer que le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ est une solution *mild* de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman "ergodique" :

$$\mathcal{L}v(x) + \psi\left(x, \nabla v(x)\sigma(x)\right) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.3.10}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur défini formellement de la façon suivante :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma(x)\sigma(x)^*\nabla^2 f(x)\right) + \left\langle F(x), \nabla f(x)\right\rangle.$$

Définition 4.3.1

On dit d'un couple (v, λ), où $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, qu'il est solution *mild* de l'équation (4.3.10) si :
- $v \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$;
- $\exists C > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$, $|\nabla v(x)h| \leqslant C|h|\left(1 + |x|^k\right)$;
- $\forall 0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $v(x) = P_{T-t}[v](x) + \int_t^T \left(P_{s-t}\left[\psi(\bullet, \nabla v(\bullet)\sigma(\bullet))\right](x) - \lambda\right) \mathrm{d}s$.

Remarque 4.3.2. On a : $P_t\left[\psi\left(\bullet, \nabla v(\bullet)\sigma(\bullet)\right)\right](x) = \mathbb{E}\left[\psi\left(X_t^x, \nabla v\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)\right)\right]$.

Théorème 4.3.3

On suppose vérifiées les hypothèses 4.1.1 et 4.2.1.
Dans ce cas, le couple $\left(\overline{v}, \overline{\lambda}\right)$ est solution de l'équation HJB (4.3.10).
Réciproquement, si le couple (v, λ) est solution de (4.3.10), alors, quand on pose $Y_t^x = v\left(X_t^x\right)$ et $Z_t^x = \nabla v\left(X_t^x\right)\sigma\left(X_t^x\right)$, le triplet (Y^x, Z^x, λ) est solution de l'EDSRE (4.2.6).

4.4 Contrôle ergodique optimal

Comme dans la section précédente, on s'intéresse au problème du contrôle ergodique optimal. La méthode d'étude étant la même, on ne fait ici que rappeler les résultats principaux.

On suppose vérifiée l'hypothèse 4.1.1 et 4.2.2 ; on note X^x la solution de l'EDS (4.1.1).

On appelle *contrôle* tout processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, où $k > 0$.

Soit $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ et $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables ; on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$ et pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, on ait :

$$|R(u)| \leqslant c, \quad |L(x,u)| \leqslant c \quad \text{et} \quad |L(x,u) - L(x',u)| \leqslant c|x - x'|.$$

On définit alors le coût ergodique associée au contrôle u et à la condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule : (on renvoie à la section précédente pour la définition de $\mathbb{E}_T^u$)

$$J(x,u) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathbb{E}_T^u \left[\int_0^T L\left(X_s^x, u_s\right) \mathrm{d}s\right].$$

Notre objectif va être de minimiser le coût sur l'ensemble des contrôles.

On note ψ le Hamiltonien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^l$ par :

$$\psi(x,z) = \inf_{u\in\mathbb{R}^k} \left\{L(x,u) + z\,.\,R(u)\right\}. \tag{4.4.11}$$

On montre assez facilement que pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, l'application $(x,z) \mapsto L(x,u) + z\,.\,R(u)$ est c-lipschitzienne par rapport à x et z ; dès lors, la fonction ψ est elle-même c-lipschitzienne par rapport à x et z, en tant qu'infimum de fonctions lipschitziennes ayant une constante de Lipschitz commune.

L'hypothèse 4.2.1 est ainsi vérifiée et le théorème 4.2.6 nous indique l'EDSRE (4.2.6) admet une solution sous la forme $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$.

On peut montrer (voir à ce sujet le théorème 4 de [MW67]) que si, pour tout (x,z) l'infimum dans la définition précédente est atteint, alors il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, qui soit mesurable et telle que $\psi(x,z) = L(x, \gamma(x,z)) + z\,.\,R(\gamma(x,z))$.

Théorème 4.4.1

On se place sous les hypothèses 4.1.1 et 4.2.2 ; on rappelle que L et R suivent certaines contraintes énoncées en début de section.

En outre, on suppose que le triplet (Y, Z, λ) est solution de l'EDSRE (4.2.6) pour un certain $x \in \mathbb{R}^d$; où Y est un processus continu progressivement mesurable, $Z \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega; \mathrm{L}^2\left(0,\infty;\mathbb{R}^d\right)\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Enfin, on suppose qu'il existe une constante $c_x > 0$, dépendant éventuellement de x, telle que $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\forall t \geqslant 0,\ |Y_t| \leqslant c_x \left(1 + |X_t^x|^2\right).$$

Alors :

(i) pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geqslant \lambda = \overline{\lambda}$;

(ii) si $L\left(X_t^x, u_t\right) + Z_t\,.\,R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, Z_t\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour presque tout $t \geqslant 0$, alors $J(x,u) = \lambda = \overline{\lambda}$;

(iii) si l'infimum est toujours atteint en (3.5.24), alors le contrôle $\overline{u}_t = \gamma\left(X_t^x, Z_t\right)$ vérifie $J\left(x, \overline{u}\right) = \overline{\lambda}$.

En particulier, pour la solution $\left(\overline{v}\left(X_t^x\right), \overline{\zeta}\left(X_t^x\right), \overline{\lambda}\right)$ mentionnée ci-dessus, cela signifie que :

(iv) pour tout contrôle u, on a $J(x,u) \geqslant \overline{\lambda}$;

(v) si $L\left(X_t^x, u_t\right) + \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\,.\,R\left(u_t\right) = \psi\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right)$ $\mathbb{P}$-p.s. et pour p.t. $t \geqslant 0$, alors $J(x,u) = \overline{\lambda}$;

(vi) si l'infimum est toujours atteint en (3.5.24), alors $\overline{u}_t = \gamma\left(X_t^x, \overline{\zeta}\left(X_t^x\right)\right)$ vérifie $J\left(x, \overline{u}\right) = \overline{\lambda}$.

5 Liens entre EDSR et EDSR ergodiques sous des hypothèses faibles

Dans cette section, on continuera à travailler avec des hypothèses du même type que dans la section précédente. On s'intéressera davantage au comportement en temps des solutions *mild* des équations HJB, et on fera le lien avec les solutions *mild* des équations HJB ergodiques.

5.1 Étude préliminaire d'une EDS

On considérera ici la même EDS que dans la section précédente, mais avec un coefficient de diffusion désormais constant. On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, W un mouvement brownien d-dimensionnel de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ supposée vérifiant les conditions habituelles.

On considère ici l'EDS :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= (AX_t + F(t, X_t))\,\mathrm{d}t + G\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 &= x \end{cases}, \tag{5.1.1}$$

pour laquelle on formule les hypothèses suivantes.

Hypothèse 5.1.1

- $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est strictement monotone, au sens où

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \langle x, Ax \rangle \leqslant -\eta |x|^2$$

  et A est le générateur d'un semi-groupe de contractions $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{t \geqslant 0}$;
- $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application bornée mesurable ;
- $G \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$.

Proposition 5.1.2

1. On se place dans le cadre de l'hypothèse 5.1.1, et on suppose de plus que F est globalement lipschitzienne par rapport à x. Alors, pour tout $p \in [2, +\infty[$ et pour tout $T > 0$, il existe un unique processus $X^x \in \mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$ qui soit solution de l'équation (5.1.1). De plus, on a :

$$\sup_{0 \leqslant t < +\infty} \mathbb{E}\left[|X^x_t|^p\right] \leqslant C\left(1 + |x|^p\right), \tag{5.1.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |X^x_t|^p\right] \leqslant C(1+T)\left(1 + |x|^p\right), \tag{5.1.3}$$

   où C est une constante qui ne dépend que de p, G et $\|F\|_\infty$.

2. Si on suppose seulement que F est bornée et mesurable, alors la solution de (5.1.1) existe toujours, mais au sens faible : il existe un espace probabilisé filtré $\left(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}, \left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)\right)$, un $\widetilde{\mathbb{P}}$-mouvement brownien $\widetilde{W}$ et un processus $\widetilde{X}$ solution de (5.1.1) sur cet espace probabilisé muni de son mouvement brownien. Les majorations (5.1.2) et (5.1.3) demeurent vraies (en prenant l'espérance sous $\widetilde{\mathbb{P}}$) et une telle solution est unique en loi.

Démonstration :

Ce résultat ressemble essentiellement à la proposition 4.1.2. La majoration (5.1.2) s'obtient par des calculs similaires à ce qui a été fait au tout début de la démonstration du théorème 4.1.3. On va donc ici montrer la majoration (5.1.3).

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 \leqslant t \leqslant T$, on a :

$$\begin{aligned}
|X_t^x| &\leqslant \left|\mathrm{e}^{tA}x\right| + \left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} F\left(s, X_s^x\right)\, \mathrm{d}s\right| + \left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right| \\
&\leqslant |x| + \|F\|_\infty \int_0^t \mathrm{e}^{-\eta(t-s)}\, \mathrm{d}s + \left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right| \\
&\leqslant |x| + \|F\|_\infty \frac{1}{\eta} + \left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|
\end{aligned}$$

$$|X_t^x|^p \leqslant 3^{p-1}\left(|x|^p + \left(\frac{\|F\|_\infty}{\eta}\right)^p + \left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p\right)$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t^x|^p \leqslant 3^{p-1}\left(|x|^p + \frac{\|F\|_\infty^p}{\eta^p} + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p\right) \leqslant \kappa_1\left(1 + |x|^p + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p\right),$$

où $\kappa_1 = 3^{p-1} \min\left\{1, \left(\frac{\|F\|_\infty}{\eta}\right)^p\right\}$.

On écrit alors :

$$\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s = c_\alpha \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{(t-u)A} Y_u\, \mathrm{d}u,$$

où $\alpha \in \left]\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right[$, $c_\alpha = \left(\int_s^t (t-u)^{\alpha-1}(u-s)^{-\alpha}\, \mathrm{d}u\right)^{-1}$ et $Y_u = \int_0^u (u-s)^{-\alpha} \mathrm{e}^{(u-s)A} G\, \mathrm{d}W_s$.

Ainsi, notant q l'exposant conjugué de p, défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on obtient, par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p &\leqslant c_\alpha^p \left(\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \left\|\mathrm{e}^{(t-u)A}\right\| |Y_u|\, \mathrm{d}u\right)^p \\
&\leqslant c_\alpha^p \left(\int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\eta(t-u)} |Y_u|\, \mathrm{d}u\right)^p \\
&\leqslant c_\alpha^p \left(\int_0^t (t-u)^{(\alpha-1)q} \mathrm{e}^{-\eta(t-u)q}\, \mathrm{d}u\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_0^t |Y_u|^p\, \mathrm{d}u\right).
\end{aligned}$$

On note alors $\kappa_2 = c_\alpha^p \left(\int_0^t (t-u)^{(\alpha-1)q} \mathrm{e}^{-\eta(t-u)q}\, \mathrm{d}u\right)^{\frac{p}{q}}$.

Par les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p\right] &\leqslant \kappa_2 \mathbb{E}\left[\int_0^T |Y_u|^p\, \mathrm{d}u\right] \\
&\leqslant \kappa_2 \int_0^T \mathbb{E}\left[|Y_u|^p\right]\, \mathrm{d}u \\
&\leqslant \kappa_2 T \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbb{E}\left[|Y_t|^p\right] \\
&\leqslant \kappa_3 T \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^u (u-s)^{-2\alpha} \left\|\mathrm{e}^{(u-s)A} G\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}^2\, \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\
&\leqslant \kappa_3 T \|G\|^2 \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\int_0^u v^{-2\alpha} \mathrm{e}^{-2\eta v}\, \mathrm{d}v\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

Or, on peut montrer (en coupant l'intégrale en 1 si jamais $T \geqslant 1$) que :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left(\int_0^u v^{-2\alpha} \mathrm{e}^{-2\eta v}\, \mathrm{d}v\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\int_0^T v^{-2\alpha} \mathrm{e}^{-2\eta v}\, \mathrm{d}v\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \left(\int_0^1 v^{-2\alpha} \mathrm{e}^{-2\eta v}\, \mathrm{d}v + \frac{\mathrm{e}^{-2\eta}}{2\eta}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A} G\, \mathrm{d}W_s\right|^p\right] \leqslant \kappa_4 T,$$

et la majoration est démontrée. ■

Lemme 5.1.3

Quand on suppose que F est globalement lipschitzienne par rapport à x et que l'hypothèse 5.1.1 est vérifiée, alors on a l'estimation :

$$\exists \widehat{c} > 0,\ \exists \widehat{\nu} > 0,\ \forall \phi \text{ mesurable à croissance polynomiale de degré au plus } \mu,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |\mathcal{P}_t[\phi](x) - \mathcal{P}_t[\phi](y)| \leqslant \widehat{c}\left(1 + |x|^{1+\mu} + |y|^{1+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} t}, \tag{5.1.4}$$

où on rappelle que $\mathcal{P}_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$.
On insiste sur le fait que $\widehat{c}$ et $\widehat{\nu}$ ne dépendent de F que via $\|F\|_\infty$.

Remarque 5.1.4. On dit que ϕ est à croissance polynomiale de degré au plus μ si :

$$\exists c > 0,\ \exists \mu > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\phi(x)| \leqslant c\left(1 + |x|^\mu\right).$$

Démonstration :
Comme dans la preuve du théorème 4.1.3, on montre que $\mathbb{P}\left(X_t^x \neq X_t^y\right) \leqslant \widehat{c}\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} t}$.
Ainsi, pour $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable et vérifiant $|\phi(x)| \leqslant c\left(1 + |x|^\mu\right)$, on a, de la même manière que dans le théorème 4.1.3 :

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}_t[\phi](x) - \mathcal{P}_t[\phi](y)| &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|\phi\left(X_t^x\right) - \phi\left(X_t^y\right)\right|\right] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[\left|\phi\left(X_t^x\right) - \phi\left(X_t^y\right)\right|^2\right]} \sqrt{\mathbb{P}\left(X_t^x \neq X_t^y\right)} \\ &\leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left[c^2\left(2 + |x|^\mu + |y|^\mu\right)^2\right]} \sqrt{\widehat{c}\left(1 + |x|^2 + |y|^2\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} t}} \leqslant \kappa\left(1 + |x|^{1+\mu} + |y|^{1+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\widehat{\nu}}{2} t} \end{aligned}$$

■

Corollaire 5.1.5

Le relation (5.1.4) reste vraie lorsqu'on suppose seulement que F est bornée, mesurable et que pour tout $t \geqslant 0$, il existe une suite de fonctions $\left(F_n(t, \bullet)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ globalement lipschitziennes telles que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\|_\infty < \infty$ et qui convergent simplement vers $F(t, \bullet)$ sur $\mathbb{R}^d$.
Dans ce cas, la définition de $\mathcal{P}_t[\phi]$ est prise relativement à la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ introduite dans la proposition 5.1.2.

Démonstration :
Elle est similaire à celle du corollaire 4.1.5. ■

5.2 Étude d'une EDSR à horizon fini

Désormais, on fixe $T > 0$, et on considère l'EDSR suivante, d'horizon fini, dont l'inconnue est un processus $\left(Y_s^{T,t,x}, Z_s^{T,t,x}\right)_{s\in[t,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$:

$$Y_s^{T,t,x} = \xi^T + \int_s^T f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{T,t,x}\right) \mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{T,t,x}\,\mathrm{d}W_r \quad \text{pour tout } s \in [t,T], \tag{5.2.5}$$

où $\left(X_s^{t,x}\right)_{s\geqslant t}$ est la solution *mild* de l'EDS (5.1.1) issue de x au temps t. Si $t = 0$, on simplifiera les notations en écrivant $Y_s^{T,x} := Y_s^{T,0,x}$ et $Z_s^{T,x} := Z_s^{T,0,x}$.

Hypothèse 5.2.1

Il existe des constantes $M > 0$ et $\mu > 0$ telles que $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et ξ^T vérifient :
- $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (on retire la dépendance temporelle de F) est une fonction globalement lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^1$;
- ξ^T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et vérifiant

$$\left|\xi^T\right| \leqslant C\left(1 + \sup_{s\in[t,T]} |X_s^x|^\mu\right);$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall z, z' \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,z) - f(x,z')| \leqslant M|z - z'|$;
- $\forall z \in \mathbb{R}^d$, $f(\bullet, z)$ est continue et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,0)| \leqslant C\,(1 + |x|^\mu)$.

Lemme 5.2.2

On se place dans le cadre des hypothèses 5.1.1 et 5.2.1.
Alors l'EDSR (5.2.5) admet une unique solution $\left(Y_s^{T,t,x}, Z_s^{T,t,x}\right)_{s\in[t,T]}$ appartenant à l'espace $\bigcap_{p\geqslant 2}\left(\mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathcal{C}\left([t,T], \mathbb{R}^d\right)\right) \times \mathrm{L}^p_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([t,T], \mathbb{R}^d\right)\right)\right)$.

Démonstration :

La démonstration de l'existence utilise une méthode de point fixe : on renvoie à la démonstration de la proposition 4.3 de [FT02b].

On va démontrer l'unicité : soient $\left(Y^1, Z^1\right)$ et $\left(Y^2, Z^2\right)$ deux solutions, on note $\widehat{Y} = Y^1 - Y^2$ et $\widehat{Z} = Z^1 - Z^2$.

On pose, pour $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\beta_s = \begin{cases} \dfrac{f\left(X_s^{t,x}, Z_s^1\right) - f\left(X_s^{t,x}, Z_s^2\right)}{\left|\widehat{Z}_s\right|^2}\widehat{Z}_s & \text{si } Z_s^1 \neq Z_s^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on remarque que β est un processus borné par M.

On a

$$\mathrm{d}\widehat{Y}_s = -\left[f\left(X_s^{t,x}, Z_s^1\right) - f\left(X_s^{t,x}, Z_s^2\right)\right] \mathrm{d}s + \widehat{Z}_s \,.\, \mathrm{d}W_s.$$

Comme β est borné, par le théorème de Girsanov, il existe une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\widetilde{W}_s = W_s - \int_t^s \beta_r\,\mathrm{d}r$ est un mouvement brownien.

Ainsi

$$\widehat{Y}_T - \widehat{Y}_s = \int_s^T \widehat{Z}_r \,.\, \mathrm{d}\widetilde{W}_r, \text{ puis } \widehat{Y}_s = \widetilde{\mathbb{E}}^{\mathcal{F}_s}\left[\widehat{Y}_s\right] = 0.$$

Ainsi, on a montré que $\forall t \geqslant 0$, $\left(Y_t^1 = Y_t^2\ \mathbb{P}\text{-p.s.}\right)$; la continuité de Y^1 et Y^2 permet d'en déduire que $Y^1 = Y^2$ $\mathbb{P}$-p.s.

Dès lors, on a $\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\widehat{Z}_s\right|^2 \mathrm{d}s\right] = 0$, d'où l'égalité de Z^1 et Z^2 dans $\mathrm{L}^2_{\mathcal{P}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([t,T], \mathbb{R}^d\right)\right)$. ■

Hypothèse 5.2.3

On sera parfois amené à faire une hypothèse supplémentaire sur la variable aléatoire ξ^T :
- $\xi^T = g\left(X_T^{t,x}\right)$, où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et à croissance polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |g(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^\mu\right).$$

Dans la suite, on va s'intéresser à l'équation HJB :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f\left(x, \nabla u(t,x)G\right) = 0, & t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{array}\right. \tag{5.2.6}$$

où $\mathcal{L}u(t,x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 u(t,x)\right) + \langle Ax + F(x), \nabla u(t,x)\rangle$.

Définition 5.2.4

On dit d'une fonction $u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ qu'elle est solution *mild* de l'équation (5.2.6) si :
- $u \in \mathcal{C}^{0,1}\left([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$;
- $\exists C > 0$, $\exists k : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$, $\forall t \in [0,T[$,

$$|u(t,x)| \leqslant C\left(1 + |x|^C\right), \quad |\nabla u(t,x)| \leqslant Ck(t)\left(1 + |x|^C\right) \quad \text{et} \quad \int_0^T k(t)\,\mathrm{d}t < \infty;$$

- $\forall t \in [0,T]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $u(t,x) = P_{T-t}[g](x) + \displaystyle\int_t^T P_{s-t}\left[f(\bullet, \nabla u(t,\bullet)G)\right](x)\,\mathrm{d}s$.

On rappelle que $P_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$.

Théorème 5.2.5

On suppose vérifiées les hypothèses 5.1.1, 5.2.1 et 5.2.3.
Dans ce cas, il existe une unique solution *mild* à l'équation (5.2.6) ; il s'agit de $u_T(t,x) = Y_t^{T,t,x}$.

Démonstration :
On renvoie à la démonstration du théorème 4.2 de [FT02a]. ■

5.3 Étude d'une EDSR ergodique

Ici, on s'intéresse à l'EDSRE d'inconnue $(Y_t^x, Z_t^x, \lambda)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$:

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x \,.\, \mathrm{d}W_s \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{5.3.7}$$

Hypothèse 5.3.1

Il existe des constantes $M > 0$ et $\mu \geqslant 0$ telles que :
- $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est globalement lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall z, z' \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,z) - f(x,z')| \leqslant M|z - z'|$;
- $\forall z \in \mathbb{R}^d$, $f(\bullet, z)$ est continue et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,0)| \leqslant C(1 + |x|^\mu)$.

Lemme 5.3.2

On se place sous les hypothèses 5.1.1 et 5.3.1.
Ainsi, il existe une solution $(Y^x, Z^x, \lambda) \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}(\Omega, \mathcal{C}([0,\infty[, \mathbb{R})) \times \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left([0,\infty[, \mathbb{R}^d\right)\right) \times \mathbb{R}$ à l'équation (5.3.7).
De plus, il existe $v \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$ telle que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} Y_t^x = v(X_t^x) \quad &\text{et} \quad Z_t^x = \nabla v(X_t^x)\, G, \\ v(0) &= 0, \\ |v(x) - v(x')| &\leqslant C\left(1 + |x|^{1+\mu} + |x'|^{1+\mu}\right), \\ |\nabla v(x)| &\leqslant C\left(1 + |x|^{1+\mu}\right). \end{aligned}$$

Démonstration :

La méthode employée est la même que pour le théorème 4.2.6 : la seule différence vient de la croissance polynomiale de $f(\bullet, 0)$. ■

Lemme 5.3.3

La solution (Y^x, Z^x, λ) du lemme précédent est unique dans l'ensemble des triplets (Y, Z, λ) tels que :
- $Y = v(X^x)$, avec $|v(x)| \leqslant C(1 + |x|^p)$ pour un $p \geqslant 0$;
- $Z \in \mathrm{L}^2_{\mathcal{P},\mathrm{loc}}\left(\Omega, \mathrm{L}^2\left(0,\infty; \mathbb{R}^d\right)\right)$, $Z = \zeta(X^x)$ avec $\zeta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Démonstration :

On considère deux solutions $\left(Y^1 = v^1(X^x), Z^1 = \zeta^1(X^x), \lambda^1\right)$ et $\left(Y^2 = v^2(X^x), Z^2 = \zeta^2(X^x), \lambda^2\right)$. Pour montrer que $\lambda^1 = \lambda^2$, on opère de la même façon que dans le théorème 3.2.7.
On écrit :

$$\begin{aligned} v^1(x) - v^2(x) &= Y_0^1 - Y_0^2 \\ &= Y_T^1 - Y_T^2 + \int_0^T \left\{ f\left(X_s^x, Z_s^1\right) - f\left(X_s^x, Z_s^2\right)\right\} \mathrm{d}s - \int_0^T \left(Z_s^1 - Z_s^2\right).\mathrm{d}W_s \\ &= v^1(X_T^x) - v^2(X_T^x) + \int_0^T \left(Z_s^1 - Z_s^2\right).\mathrm{d}\widetilde{W}_s, \end{aligned}$$

où $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta(X_s^x)\, \mathrm{d}s$ et $\beta(x) = \begin{cases} \frac{\left(f\left(x,\zeta^1(x)\right) - f\left(x,\zeta^2(x)\right)\right).\left(\zeta^1(x) - \zeta^2(x)\right)}{\left|\zeta^1(x) - \zeta^2(x)\right|^2} & \text{si } \zeta^1(x) \neq \zeta^2(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme β est bornée par l et mesurable, par le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\mathbb{Q}^T$ sous laquelle $\widetilde{W}$ est un mouvement brownien sur $[0, T]$.

Ainsi, $v^1(x) - v^2(x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[v^1\left(X_T^x\right) - v^2\left(X_T^x\right)\right] = \mathcal{P}_T\left[v^1 - v^2\right](x)$, où $\mathcal{P}$ est le semi-groupe de Kolmogorov associé à l'EDS :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dU_t^x & = & \left(AU_t^x + F\left(U_t^x\right)\right) dt + G\left(\beta\left(U_t^x\right) dt + dW_t\right) \\ U_0^x & = & x \end{array}\right.$$

On peut appliquer le corollaire 5.1.5 et le lemme 4.2.4 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left|v^1(x) - v^2(x)\right| &= \left|\left(v^1 - v^2\right)(x) - \left(v^1 - v^2\right)(0)\right| = \left|\mathcal{P}_T\left[v^1 - v^2\right](x) - \mathcal{P}_T\left[v^1 - v^2\right](0)\right| \\ &\leqslant \widehat{c}\left(1 + |x|^{p+1}\right) e^{-\widehat{\nu} T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc v^1 et v^2 coïncident sur $\mathbb{R}^d$.
La formule d'Itô appliquée à $\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2$ permet de montrer également que $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_s^1 - Z_s^2\right|^2 ds\right] = 0.$ ■

Dans la suite, on va s'intéresser à l'équation HJB ergodique :

$$\mathcal{L}v(x) + f\left(x, \nabla v(x) G\right) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.3.8}$$

où $\mathcal{L}v(x) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 v(x)\right) + \langle Ax + F(x), \nabla v(x)\rangle$.

Définition 5.3.4

On dit d'une fonction $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et d'un réel λ qu'ils sont solutions *mild* de l'équation (5.3.8) si :
- $v \in \mathcal{C}^{0,1}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}\right)$;
- $\exists C > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|v(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^C\right)$;
- $\forall t \in [0, T]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $v(x) = P_{T-t}[v](x) + \int_t^T P_{s-t}\left[f(\bullet, \nabla v(\bullet) G)\right](x)\, ds$.

On rappelle que $P_t[\phi](x) = \mathbb{E}\left[\phi\left(X_t^x\right)\right]$.

Théorème 5.3.5

On suppose vérifiées les hypothèses 5.1.1, 5.3.1.
Dans ce cas, il existe une unique solution *mild* à l'équation (5.3.8) ; il s'agit du couple défini au lemme 5.3.2.

Démonstration :
On renvoie à la démonstration du théorème 3.4.5. ■

5.4 Comportement en temps long de ces deux EDSR

Dans cette sous-section, on rappelle que $\left(Y_s^{T,x}, Z_s^{T,x}\right)_{s\in[0,T]}$ désigne la solution de l'EDSR à horizon fini (5.2.5) et que $(Y_s^x, Z_s^x, \lambda)_{s\geqslant 0}$ est la solution de l'EDSRE (5.3.7).

Théorème 5.4.1

Lorsqu'on se place sous les hypothèses 5.1.1 et 5.2.1, on a :

$$\forall T>0,\, \forall n\in\mathbb{N}^*,\, \left|\frac{Y_0^{T,x}}{T}-\lambda\right| \leqslant \frac{\kappa_n\left(1+T^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+|x|^{1+\mu}\right)}{T}.$$

En particulier, ceci montre que $\dfrac{Y_0^{T,x}}{T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration :

Par inégalité triangulaire, $\left|\dfrac{Y_0^{T,x}}{T}-\lambda\right| \leqslant \left|\dfrac{Y_0^{T,x}-Y_0^x-\lambda T}{T}\right| + \left|\dfrac{Y_0^x}{T}\right|$.

Mais en reprenant les équations vérifiées par $Y^{T,x}$ et par Y^x, on a :

$$\begin{aligned}
Y_0^{T,x}-Y_0^x-\lambda T &= \xi^T + \int_0^T f\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) \mathrm{d}s - \int_0^T Z_s^{T,x}.\mathrm{d}W_s - \left(Y_T^x + \int_0^T \{f(X_s^x,Z_s^x)-\lambda\}\, \mathrm{d}s - \int_0^T Z_s^x.\mathrm{d}W_s\right) - \lambda T\\
&= \xi^T - v(X_T^x) + \int_0^T \left\{f\left(X_s^x, Z_s^{T,x}\right) - f(X_s^x,Z_s^x)\right\} \mathrm{d}s - \int_0^T \left(Z_s^{T,x}-Z_s^x\right).\mathrm{d}W_s\\
&= \xi^T - v(X_T^x) - \int_0^T \left(Z_s^{T,x}-Z_s^x\right).\mathrm{d}\widetilde{W}_s,
\end{aligned}$$

où $\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \beta_s^T\, \mathrm{d}s$ et $\beta_s^T = \begin{cases} \dfrac{\left(f\left(X_s^x,Z_s^{T,x}\right)-f(X_s^x,Z_s^x)\right).\left(Z_s^{T,x}-Z_s^x\right)}{\left|Z_s^{T,x}-Z_s^x\right|^2} & \text{si } Z_s^{T,x}\neq Z_s^x\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Par Girsanov, $\widetilde{W}$ est un mouvement brownien sous une certaine probabilité $\mathbb{Q}^T$, qui vérifie $\mathrm{d}\mathbb{Q}^T = M_T \mathrm{d}\mathbb{P}$ quand on pose $M_T = \exp\left(\int_0^T \beta_s^T.\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T \left|\beta_s^T\right|^2 \mathrm{d}s\right)$.

On en déduit alors :

$$Y_0^{T,x}-Y_0^x-\lambda T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\xi^T - v(X_T^x)\right].$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{Y_0^{T,x}-Y_0^x-\lambda T}{T}\right| &\leqslant \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|\xi^T|\right]}{T} + \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|v(X_T^x)|\right]}{T}\\
&\leqslant \frac{C\left(1+\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^x|^\mu\right]\right)}{T} + \frac{C\left(1+\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|X_T^x|^{1+\mu}\right]\right)}{T}
\end{aligned}$$

D'autre part, par les inégalités de Jensen et (5.1.3), il vient :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^x|^\mu\right] \leqslant \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|X_t^x|^{n\mu}\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\widetilde{C}_n(1+T)\left(1+|x|^{n\mu}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C_n\left(1+T^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+|x|^\mu\right).$$

D'autre part, suite à l'inégalité (5.1.2) :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|X_T^x|^{1+\mu}\right] \leqslant C'\left(1+|x|^{1+\mu}\right).$$

Notons que les constantes C' et C_n ne dépendent pas de T.

Finalement :

$$\begin{aligned}\left|\frac{Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T}{T}\right| &\leqslant \frac{C}{T}\left(2 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_t^x|^\mu\right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[|X_T^x|^{1+\mu}\right]\right) \\ &\leqslant \frac{C}{T}\left(2 + C_n\left(1 + T^{\frac{1}{n}}\right)(1+|x|^\mu) + C'\left(1+|x|^{1+\mu}\right)\right) \\ &\leqslant \frac{\widehat{C}_n}{T}\left(1+T^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+|x|^{1+\mu}\right).\end{aligned}$$

Et comme $\left|\frac{Y_0^x}{T}\right| = \left|\frac{v(x)}{T}\right| \leqslant \frac{C\left(1+|x|^{1+\mu}\right)}{T}$, en fin de compte :

$$\left|\frac{Y_0^{T,x} - \lambda T}{T}\right| \leqslant \frac{\kappa_n}{T}\left(1+T^{\frac{1}{n}}\right)\left(1+|x|^{1+\mu}\right).$$

■

Théorème 5.4.2 (*Cas markovien*)

Quand on ajoute l'hypothèse 5.2.3 aux hypothèses du théorème précédent, alors on peut en raffiner quelque peu le résultat et on obtient :

$$\forall T > 0, \left|\frac{Y_0^{T,x}}{T} - \lambda\right| \leqslant \frac{\kappa\left(1+|x|^{1+\mu}\right)}{T}.$$

Démonstration :

On commence par faire les mêmes calculs que dans la démonstration précédente. Comme $\xi^T = g\left(X_T^x\right)$, on a :

$$Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[g\left(X_T^x\right) - v\left(X_T^x\right)\right].$$

Mais on sait que $|g(x) - v(x)| \leqslant |g(x)| + |v(x)| \leqslant C(1+|x|^\mu) + C\left(1+|x|^{1+\mu}\right) \leqslant C'\left(1+|x|^{1+\mu}\right)$. Dès lors :

$$\left|\frac{Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T}{T}\right| \leqslant \frac{C'}{T}\left(1 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[|X_T^x|^{1+\mu}\right]\right) \leqslant \frac{\kappa}{T}\left(1+|x|^{1+\mu}\right).$$

■

Pour le moment, on a étudié le comportement au premier ordre pour montrer que, sous de bonnes hypothèses, $\frac{Y_0^{T,x}}{T} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Les théorèmes qui suivent vont s'intéresser au comportement aux ordres suivants (2 et 3).

Remarque 5.4.3. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $F \equiv 0$. En effet, notre objectif est d'étudier le comportement en temps long des solutions de

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) + f\left(x, \nabla u(t,x)G\right), & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}.$$

Quitte à poser $\widetilde{f}(x,z) = f(x,z) + \langle F(x), zG^{-1}\rangle$ (qui est une fonction continue et à croissance polynomiale en x, et globalement lipschitzienne en z), on se ramène effectivement au cas $F \equiv 0$, puisque :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(t,x) + f\left(x,\nabla u(t,x)G\right) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 u(t,x)\right) + \langle Ax + F(x), \nabla u(t,x)\rangle + f\left(x, \nabla u(t,x)G\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(GG^*\nabla^2 u(t,x)\right) + \langle Ax, \nabla u(t,x)\rangle}_{=:\widetilde{\mathcal{L}}u(t,x)} + \widetilde{f}\left(x,\nabla u(t,x)G\right)\end{aligned}$$

On est donc amené à faire le jeu d'hypothèses qui suit pour continuer l'étude, tout en simplifiant les calculs qui vont suivre. Il n'est en réalité pas plus contraignant que la combinaison des hypothèses 5.2.1 et 5.2.3.

Hypothèse 5.4.4

Il existe des constantes $M > 0$ et $\mu > 0$ telles que $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et ξ^T vérifient :
- $F \equiv 0$;
- $\xi^T = g\left(X_T^{t,x}\right)$, où $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et à croissance polynomiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |g(x)| \leqslant C\left(1 + |x|^\mu\right).$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall z, z' \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,z) - f(x,z')| \leqslant M|z - z'|$;
- $\forall z \in \mathbb{R}^d$, $f(\bullet, z)$ est continue et $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|f(x,0)| \leqslant C\left(1 + |x|^\mu\right)$.

Théorème 5.4.5

On se place sous les hypothèses 5.1.1 et 5.4.4.
Ainsi, il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

De plus, on a la vitesse de convergence suivante :

$$\left|Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L\right| \leqslant C\left(1 + |x|^{2+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} T}.$$

Remarque 5.4.6. En notant u et v les solutions *mild* des équations (5.2.6) et (5.3.8), ceci se réécrit :

$$|u(T,x) - \lambda T - v(x) - L| \leqslant C\left(1 + |x|^{2+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} T}.$$

Démonstration :

On définit les fonctions $u_T(t,x) := Y_t^{T,t,x}$ et $w_T(t,x) := u_T(t,x) - \lambda(T-t) - v(x)$.
Ainsi, on a $Y_s^{T,t,x} = u_T\left(s, X_s^{t,x}\right)$ et $Y_s^x = v\left(X_s^x\right)$, pour tout $s \in [t,T]$.
On rappelle que u_T est l'unique solution *mild* de

$$\begin{cases} \partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) + f\left(x, \nabla u_T(t,x) G\right) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \\ u_T(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

et que u_{T+S} est l'unique solution *mild* de

$$\begin{cases} \partial_t u_{T+S}(t,x) + \mathcal{L}u_{T+S}(t,x) + f\left(x, \nabla u_{T+S}(t,x) G\right) = 0, & (t,x) \in [0,T+S] \times \mathbb{R}^d \\ u_{T+S}(T+S,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}.$$

En conséquence, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $u_T(0,x) = u_{T+S}(S,x)$, puis $w_T(0,x) = w_{T+S}(S,x)$.

Lemme 5.4.7 (*Estimées de w_T*)

Sous les hypothèses du théorème 5.4.5, on a :

$$\exists \widetilde{C}_1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ |w_T(0,x)| \leqslant \widetilde{C}_1\left(1 + |x|^{1+\mu}\right)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ \forall 0 \leqslant T' \leqslant T,\ \exists C_{T'} > 0,\ |\nabla_x w_T(0,x)| \leqslant C_{T'}\left(1 + |x|^{1+\mu}\right)$$

$$\exists \widetilde{C}_2 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ |w_T(0,x) - w_T(0,y)| \leqslant \widetilde{C}_2\left(1 + |x|^{2+\mu} + |y|^{2+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} T}.$$

La constante $\widehat{\nu}$ faisant référence au lemme 5.1.3, et les constantes $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ et $C_{T'}$ ne dépendant que de η, G, μ, M, $\left\|\frac{g(\bullet)}{1+|\bullet|^\mu}\right\|_\infty$ et $\left\|\frac{f(\bullet)}{1+|\bullet|^\mu}\right\|_\infty$ (en plus de T' pour $C_{T'}$).

Démonstration (du lemme) :

Le premier point est une application directe du théorème 5.4.2 :

$$|w_T(0,x)| = |u_T(0,x) - \lambda T - v(x)| = \left|Y_0^{T,x} - Y_0^x - \lambda T\right| \leqslant \kappa\left(1 + |x|^{1+\mu}\right).$$

On s'intéresse maintenant à l'estimation du gradient de w_T.
D'après le théorème 4.2 de [FT02a], on peut écrire, pour $s \in [t,T]$, $Z_s^{T,t,x} = \nabla_x u_T\left(s, X_s^{t,x}\right) G$; et d'après le théorème 3.3.7, on a aussi $Z_s^{t,x} = \nabla_x v\left(X_s^{t,x}\right) G$. Notamment, on remarque que w_T est différentiable par rapport à la variable d'espace et $Z_s^{T,t,x} - Z_s^{t,x} = \nabla_x w_T\left(s, X_s^{t,x}\right) G$. Aussi, pour tout $s \in [t,T]$,

$$\begin{aligned}
w_T\left(s, X_s^{t,x}\right) &= u_T\left(s, X_s^{t,x}\right) - \lambda(T-s) - v\left(X_s^{t,x}\right) = Y_s^{T,t,x} - \lambda(T-s) - Y_s^{t,x} \\
&= \xi^T + \int_s^T f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{T,t,x}\right) \mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{T,t,x} . \mathrm{d}W_r - \lambda(T-s) \\
&\quad - Y_T^{t,x} - \int_s^T \left\{f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\right) - \lambda\right\} \mathrm{d}r + \int_s^T Z_r^{t,x} . \mathrm{d}W_r \\
&= w_T\left(T, X_T^{t,x}\right) + \int_s^T \left\{f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{T,t,x}\right) - f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\right)\right\} \mathrm{d}r - \int_s^T \left\{Z_r^{T,t,x} - Z_r^{t,x}\right\} . \mathrm{d}W_r
\end{aligned}$$

Puis, par soustraction, on a : $\forall t \leqslant s \leqslant T' \leqslant T$,

$$w_T\left(s, X_s^{t,x}\right) = w_T\left(T', X_{T'}^{t,x}\right) + \int_s^{T'} \left\{f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{T,t,x}\right) - f\left(X_r^{t,x}, Z_r^{t,x}\right)\right\} \mathrm{d}r - \int_s^{T'} \left\{Z_r^{T,t,x} - Z_r^{t,x}\right\} . \mathrm{d}W_r.$$

À partir de $\partial_t u_T(t,x) + \mathcal{L}u_T(t,x) + f\left(x, \nabla_x u_T(t,x)G\right) = 0$ et $\mathcal{L}v(x) + f\left(x, \nabla v(x)G\right) = \lambda$, on montre que :

$$\partial_t w_T(t,x) + \mathcal{L}w_T(t,x) = f\left(x, \nabla v(x)G\right) - f\left(x, \nabla_x w_T(t,x)G + \nabla v(x)G\right).$$

En outre, la fonction w_T vérifie la condition terminale : $w_T(T',x) = Y_{T'}^{T,T',x} - \lambda(T-T') - v(x)$ (qui est une fonction continue et à croissance polynomiale en x).
Ainsi, en utilisant la formule de Bismut-Elworthy du théorème 4.2 de [FT02a], on obtient, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\nabla_x w_T(t,x)h = \mathbb{E}\left[\int_t^{T'} \left\{f\left(X_s^{t,x}, \nabla_x w_T\left(s, X_s^{t,x}\right) G + Z_s^{t,x}\right) - f\left(X_s^{t,x}, Z_s^{t,x}\right)\right\} U^h(s,t,x)\, \mathrm{d}s\right] \\
+ \mathbb{E}\left[w_T\left(T', X_{T'}^{t,x}\right) U^h(T',t,x)\right],
\end{aligned}$$

où $U^h(s,t,x) = \dfrac{1}{s-t} \displaystyle\int_t^s \langle G^{-1} \nabla X_\sigma^{t,x} h, \mathrm{d}W_\sigma \rangle$.
Comme $X^{t,x}$ est solution de l'EDS (5.1.1) avec $F \equiv 0$, on a donc $\nabla X_s^{t,x} = \mathrm{e}^{(s-t)A}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|U^h(s,t,x)\right|^2\right] &= \frac{1}{(s-t)^2} \mathbb{E}\left[\left(\int_t^s \langle G^{-1} \mathrm{e}^{(\sigma-t)A} h, \mathrm{d}W_\sigma \rangle\right)^2\right] = \frac{1}{(s-t)^2} \mathbb{E}\left[\int_t^s \left|G^{-1} \mathrm{e}^{(\sigma-t)A} h\right|^2 \mathrm{d}\sigma\right] \\
&\leqslant \frac{1}{(s-t)^2} \int_t^s \left|G^{-1}\right|^2_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} \mathrm{e}^{-2\eta(\sigma-t)} |h|^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{1}{s-t} \left|G^{-1}\right|^2_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)} |h|^2.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
|\nabla_x w_T(t,x)h| &\leqslant \mathbb{E}\left[\int_t^{T'} \left|f\left(X_s^{t,x}, \nabla_x w_T(t,x)G + Z_s^{t,x}\right) - f\left(X_s^{t,x}, Z_s^{t,x}\right)\right| \left|U^h(s,t,x)\right| \mathrm{d}s\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\left|w_{T-T'}\left(0, X_{T'}^{t,x}\right)\right| \left|U^h(T',t,x)\right|\right] \\
&\leqslant \int_t^{T'} \mathbb{E}\left[\left|f\left(X_s^{t,x}, \nabla_x w_T(t,x)G + Z_s^{t,x}\right) - f\left(X_s^{t,x}, Z_s^{t,x}\right)\right| \left|U^h(s,t,x)\right|\right] \mathrm{d}s \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[\left|w_{T-T'}\left(0, X_{T'}^{t,x}\right)\right| \left|U^h(T',t,x)\right|\right] \\
&\leqslant \int_t^{T'} \mathbb{E}\left[M \left|\nabla_x w_T(t,x)G\right| \left|U^h(s,t,x)\right|\right] \mathrm{d}s + \widetilde{C}_1\left(1 + |x|^{1+\mu}\right) \mathbb{E}\left[\left|U^h(T',t,x)\right|\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla_x w_T(t,x)h| &\leqslant M\int_t^{T'} \mathbb{E}\left[|\nabla_x w_T(t,x)G|^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left|U^h(s,t,x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s + \widetilde{C}_1\left(1+|x|^{1+\mu}\right)\mathbb{E}\left[\left|U^h(T',t,x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant M|G|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}\int_t^{T'} \mathbb{E}\left[\left|\nabla_x w_T\left(s,X_s^{t,x}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \frac{|h|}{\sqrt{s-t}}\left|G^{-1}\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad + \widetilde{C}_1\left(1+|x|^{1+\mu}\right)\frac{|h|}{\sqrt{T'-t}}\left|G^{-1}\right|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \kappa_1|h|\left(\int_t^{T'}\frac{1}{\sqrt{s-t}}\mathbb{E}\left[\left|\nabla_x w_T\left(s,X_s^{t,x}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s + \frac{1+|x|^{1+\mu}}{\sqrt{T'-t}}\right),
\end{aligned}
$$

où κ_1 ne dépend que de M et G.
On pose $\varphi(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\dfrac{|\nabla_x w_T(t,x)|}{1+|x|^{1+\mu}}$. En utilisant le théorème 4.2 de [FT02b] et le lemme 5.3.2, on montre que φ est bien définie car :

$$
|\nabla_x w_T(t,x)| \leqslant |\nabla_x u_T(t,x)| + |\nabla v(x)| \leqslant C_T\frac{1+|x|^\mu}{\sqrt{T-t}} + C\left(1+|x|^\mu\right).
$$

Ainsi,

$$
|\nabla_x w_T(t,x)h| \leqslant \kappa_1|h|\left(\int_t^{T'}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s-t}}\mathbb{E}\left[\left(1+\left|X_s^{t,x}\right|^{1+\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s + \frac{1+|x|^{1+\mu}}{\sqrt{T'-t}}\right),
$$

puis, en utilisant la majoration (5.1.2), on obtient :

$$
\frac{|\nabla_x w_T(t,x)h|}{1+|x|^{1+\mu}} \leqslant \kappa_2|h|\left(\int_t^{T'}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s-t}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{T'-t}}\right),
$$

et par passage au supremum selon $x\in\mathbb{R}^d$ et $|h|=1$, il vient :

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &\leqslant \kappa_2\left(\int_t^{T'}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s-t}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{T'-t}}\right)\\
\varphi(T'-t) &\leqslant \kappa_2\left(\int_{T'-t}^{T'}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{s-T'+t}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \kappa_2\left(\int_0^t\frac{\varphi(T'-s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}
$$

D'après le lemme 7.1.1 de [Hen81], on a :

$$
\varphi(T'-t) \leqslant \frac{\kappa_2}{\sqrt{t}} + \theta\int_0^t E'(\theta(t-s))\frac{\kappa_2}{\sqrt{s}}\mathrm{d}s,
$$

où $\theta = \left(\kappa_2\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2$ et $E(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.
Ainsi $\varphi(0)$ est majorée par une constante $C_{T'}$ qui ne dépend que de κ_2 et T' ; le fait que l'intégrale soit finie est dû au caractère borné de E' et à l'intégrabilité en 0 de $s\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{s}}$.
Dès lors $|w_T(0,x)| \leqslant C_{T'}\left(1+|x|^{1+\mu}\right)$.
Or $w_T(0,x) = u_T(0,x) - \lambda T - v(x) = Y_0^{T,0,x} - \lambda T - Y_0^{0,x} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}\left[g\left(X_T^x\right) - v\left(X_T^x\right)\right] = \mathcal{P}_T[g-v](x)$,
où $\mathcal{P}$ est le semi-groupe associé à l'EDS

$$
\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{d}U_t^x = AU_t^x\mathrm{d}t + G\left(\mathrm{d}W_t + \beta^T\left(t,U_t^x\right)\mathrm{d}t\right)\\
U_0^x = x
\end{array}\right.
$$

et où $\beta^T(t,x) = \left\{\begin{array}{ll}
\frac{f(x,\nabla_x u_T(t,x)G) - f(x,\nabla v(x)G)}{|\nabla_x u_T(t,x)G - \nabla v(x)G|^2}\left(\nabla_x u_T(t,x)G - \nabla v(x)G\right) & \text{si } t<T \text{ et } \nabla_x u_T(t,x)G \neq \nabla v(x)G\\
\frac{f(x,\nabla_x u_T(T,x)G) - f(x,\nabla v(x)G)}{|\nabla_x u_T(T,x)G - \nabla v(x)G|^2}\left(\nabla_x u_T(T,x)G - \nabla v(x)G\right) & \text{si } t\geqslant T \text{ et } \nabla_x u_T(T,x)G \neq \nabla v(x)G\\
0 & \text{sinon}
\end{array}\right.$

Ainsi, d'après 5.1.5,

$$
|w_T(0,x) - w_T(0,y)| = |\mathcal{P}_T[g-v](x) - \mathcal{P}_T[g-v](y)| \leqslant \widehat{c}\left(1+|x|^{2+\mu}+|y|^{2+\mu}\right)\mathrm{e}^{-\widehat{\nu}t}.
$$

■

D'après le lemme qu'on vient de montrer, on a :

$$\exists \widetilde{C}_1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall T > 0,\ |w_T(0,x)| \leqslant \widetilde{C}_1 \left(1 + |x|^{1+\mu}\right).$$

Par extraction diagonale (voir le paragraphe précédant le théorème 3.2.5), on montre que pour une certaine suite (T_i) croissante et tendant vers l'infini, on a : $w_{T_i}(0,\bullet) \underset{i\to\infty}{\overset{\text{cvs}}{\longrightarrow}} w$, où $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une certaine fonction continue.
Par passage à la limite dans l'inégalité $\left|w_{T_i}(0,x) - w_{T_i}(0,y)\right| \leqslant \widetilde{C}_2 \left(1 + |x|^{2+\mu} + |y|^{2+\mu}\right) \mathrm{e}^{-\widehat{\nu} T_i}$, on montre que w est une fonction constante, égale à un nombre L_1.
Notre objectif va maintenant être de montrer que $\lim\limits_{T\to\infty} w_T(0,x) = L_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$; les fonctions w_T étant globalement lipschitziennes sur K, il existe une suite $\left(T'_i\right)$ croissante et de limite infinie et une fonction $w_{\infty,K} \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ telle que $\left\|w_{T'_i}(0,\bullet) - w_{\infty,K}\right\|_\infty \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Comme précédemment, on montre que la fonction $w_{\infty,K}$ est constante, égale à $L_{2,K}$.
Un calcul permet de montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $T, S > 0$, on a :

$$w_{T+S}(0,x) = Y_S^{T+S,x} - \lambda T - Y_S^x - \int_0^S \left(Z_r^{T+S,x} - Z_r^x\right).\mathrm{d}\widetilde{W}_r^{T,S},$$

où $\widetilde{W}_t^{T,S} = W_t - \displaystyle\int_0^t \beta^{T,S}\left(s, X_s^x\right) \mathrm{d}s$ et où

$$\beta^{T,S}(t,x) = \begin{cases} \frac{f(x,\nabla_x u_{T+S}(t,x)G) - f(x,\nabla v(x)G)}{|\nabla_x u_{T+S}(t,x)G - \nabla v(x)G|^2} \left(\nabla_x u_{T+S}(t,x)G - \nabla v(x)G\right) & \text{si } t \leqslant S \text{ et } \nabla_x u_{T+S}(t,x)G \neq \nabla v(x)G \\ \frac{f(x,\nabla_x u_{T+S}(S,x)G) - f(x,\nabla v(x)G)}{|\nabla_x u_{T+S}(S,x)G - \nabla v(x)G|^2} \left(\nabla_x u_{T+S}(S,x)G - \nabla v(x)G\right) & \text{si } t > S \text{ et } \nabla_x u_{T+S}(S,x)G \neq \nabla v(x)G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par Girsanov, $\widetilde{W}^{T,S}$ est un mouvement brownien sous une loi $\mathbb{Q}^{T,S}$ et :

$$w_{T+S}(0,x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T,S}}\left[Y_S^{T+S,x} - \lambda T - Y_S^x\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T,S}}\left[w_{T+S}\left(S, X_S^x\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T,S}}\left[w_T\left(0, X_S^x\right)\right] = \mathcal{P}_S\left[w_T(0,\bullet)\right](x),$$

où $\mathcal{P}$ est le semi-groupe associé à l'EDS

$$\begin{cases} \mathrm{d}U_t^x = AU_t^x \mathrm{d}t + G\left(\mathrm{d}W_t + \beta^{T,S}\left(t, U_t^x\right)\mathrm{d}t\right) \\ U_0^x = x \end{cases}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'on peut extraire une infinité d'indices i tels que $T_i > T'_i$; on remplace alors T par T'_i et S par $T_i - T'_i$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ w_{T_i}(0,x) = \mathcal{P}_{T_i - T'_i}\left[w_{T'_i}(0,\bullet)\right](x).$$

On sait que le membre de gauche tend vers L_1. En appliquant le lemme 4.2.4 à $\beta^{T,S}$ et en utilisant ensuite le corollaire 5.1.5, on montre que le membre de droite tend vers $L_{2,K}$. Autrement dit : $L_1 = L_{2,K}$. On a donc montré que l'ensemble $\{w_T(0,\bullet)|_K | T > 1\}$ admet un unique point d'accumulation : la fonction constante égale à L_1 ; ce dernier est par ailleurs indépendant de K.
Ainsi, $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^d$, $\forall x \in K$, $w_T(0,x) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L_1$.
Plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $w_T(0,x) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L_1 =: L$.
Pour montrer la vitesse de convergence, on écrit :

$$|w_T(0,x) - L| = \lim_{S,n,m\to\infty} \left|w_T(0,x) - \mathbb{E}\left[w_T\left(0, U_S^{x,m,n}\right)\right]\right|,$$

où $U^{x,m,n}$ est le processus approchant U^x à l'aide du lemme 4.2.4 appliqué à $\beta^{T,S}$. ∎

5.5 Contrôle ergodique optimal

On s'intéresse ici au problème du contrôle ergodique optimal.

Dans toute cette section, on suppose vérifiée l'hypothèse 5.1.1 et que F est une application globalement lipschitzienne de classe $\mathcal{C}^1$. On note X^x la solution de l'EDS (5.1.1).

On appelle *contrôle* tout processus progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, où $k > 0$.

Soit $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ et $g_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ trois fonctions mesurables ; telles que pour des constantes $c, C, \mu > 0$, on ait :

- $\forall a \in \mathbb{R}^d$, $|R(a)| \leqslant c$;
- $L(\bullet, a)$ est continue en x, uniformément respectivement à $a \in \mathbb{R}^k$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall a \in \mathbb{R}^k$, $|L(x,a)| \leqslant C\,(1 + |x|^\mu)$;
- g_0 est continue ;
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|g_0(x)| \leqslant C\,(1 + |x|^\mu)$.

On introduit deux fonctions de coût. La première est la fonction de coût pour l'horizon fini : (on renvoie à la section 3 pour la définition de $\mathbb{E}_T^a$)

$$J^T(x,a) = \mathbb{E}_T^a \left[\int_0^T L\left(X_s^x, a_s\right)\,\mathrm{d}s + g_0\left(X_T^x\right) \right].$$

Le problème associé consiste à minimiser le coût sur l'ensemble des contrôles $a^T : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^k$ progressivement mesurables.

On définit ensuite le coût ergodique associée au contrôle a et à la condition initiale $x \in \mathbb{R}^d$ par la formule :

$$J(x,a) = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_T^a \left[\int_0^T L\left(X_s^x, a_s\right)\,\mathrm{d}s \right].$$

On note f_0 le Hamiltonien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^l$ par :

$$f_0(x,z) = \inf_{a\in\mathbb{R}^k} \left\{ L(x,a) + zG^{-1} \,.\, R(a) \right\}. \tag{5.5.9}$$

On peut montrer (voir à ce sujet le théorème 4 de [MW67]) que si, pour tout (x,z) l'infimum dans la définition précédente est atteint, alors il existe une fonction $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, qui soit mesurable et telle que $\psi(x,z) = L(x, \gamma(x,z)) + zG^{-1} \,.\, R(\gamma(x,z))$.

Lemme 5.5.1

Sous les hypothèses qu'on a faites ici sur R et L, la fonction f_0 est globalement lipschitzienne par rapport à z, continue par rapport à x uniformément en z, et à croissance polynomiale par rapport à x.

Démonstration :

Le fait que f_0 soit globalement lipschitzienne en z a déjà été abordé dans les sections précédentes. Les autres résultats proviennent du lemme 5.2 de [FT02a]. ■

Lemme 5.5.2

On se place dans le cadre de l'hypothèse 5.1.1 et des contraintes fixées à R et L en début de paragraphe. On suppose également que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est globalement lipschitzienne.

On note u la solution *mild* de l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) + f_0\left(x, \nabla u(t,x) G\right), & t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = g_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{5.5.10}$$

Alors, pour tout contrôle a, on a : $J^T(x,a) \geqslant u(T,x)$.

De plus, si pour tous x, z, l'infimum est atteint en (5.5.9), alors on a l'égalité $J^T\left(x, \bar{a}^T\right) = u(T, x)$, où $\bar{a}_t^T = \gamma\left(X_t^{x,\bar{a}^T}, \nabla u\left(t, X_t^{x,\bar{a}^T}\right)G\right)$.

Démonstration :
On renvoie au théorème 5.3 de [FT02a]. ■

Remarque 5.5.3. Précédemment, on a étudié l'équation HJB (5.2.6), qui s'écrivait sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \mathcal{L}u(t,x) + f(x, \nabla u(t,x)G) = 0, & t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

En fait les équations (5.2.6) et (5.5.10) sont liées par un changement de temps : si u_T est la solution *mild* de (5.2.6), alors $\tilde{u}_T(t,x) := u_T(T-t,x)$ est l'unique solution *mild* de (5.5.10). En plus, comme $\tilde{u}_T(T,x) = u_T(0,x) = Y_0^{T,0,x}$, le comportement en temps long de $Y_0^{T,0,x}$ est le même que celui de la solution de (5.5.10).

Pour le coût ergodique, on a un résultat similaire au lemme précédent.

Lemme 5.5.4

On se place dans le cadre de l'hypothèse 5.1.1 et des contraintes fixées à R et L en début de paragraphe. On suppose également que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est globalement lipschitzienne.
On note (v, λ) la solution *mild* de l'équation :

$$\mathcal{L}v(x) + f_0(x, \nabla v(x)G) = \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{5.5.11}$$

Alors, pour tout contrôle a, on a : $J^T(x,a) \geqslant \lambda$.
De plus, si pour tous x, z, l'infimum est atteint en (5.5.9), alors on a l'égalité $J^T(x, \bar{a}) = \lambda$, où $\bar{a}_t = \gamma\left(X_t^{x,\bar{a}}, \nabla u\left(t, X_t^{x,\bar{a}}\right)G\right)$.

Démonstration :
On renvoie au théorème 3.5.1. ■

Théorème 5.5.5

On se place dans le cadre de l'hypothèse 5.1.1 et des contraintes fixées à R et L en début de paragraphe. On suppose également que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est globalement lipschitzienne.
Alors, pour tout contrôle a, on a : $\liminf_{T\to\infty} \dfrac{J^T(x,a)}{T} \geqslant \lambda$.
De plus, si pour tous x, z, l'infimum est atteint en (5.5.9), alors on a :

$$J^T\left(x, \bar{a}^T\right) = J(x, \bar{a})\,T + v(x) + L + o_{T\to\infty}(1).$$

Démonstration :
Le premier résultat est une conséquence directe du lemme 5.5.2 et du théorème 5.4.5.
Le second fait intervenir en plus le lemme 5.5.4. ■

Références

[Aro67] D. G. Aronson – « Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation », *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), no. 6, p. 890–896.

[BP12] M. Briane et G. Pagès – *Théorie de l'intégration*, 5^e éd., Vuibert, 2012.

[CPX15] A. Cosso, H. Pham et H. Xing – « BSDEs with diffusion constraint and viscous Hamilton-Jacobi equations with unbounded data », arXiv :1505.06868, 2015.

[DHT10] A. Debussche, Y. Hu et G. Tessitore – « Ergodic BSDEs under weak dissipative assumptions », *Stochastic Process. Appl.* **121** (2010), no. 3, p. 407–426.

[DZ92] G. Da Prato et J. Zabczyk – *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.

[DZ96] — , *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, Cambridge University Press, 1996.

[EPQ97] N. El Karoui, S. Peng et M.-C. Quenez – « Backward stochastic differential equations in finance », *Math. Finance* **7** (1997), no. 1, p. 1–71.

[FHT09] M. Fuhrman, Y. Hu et G. Tessitore – « Ergodic BSDEs and optimal ergodic control in Banach spaces », *SIAM J. Control Optim.* **48** (2009), no. 2, p. 1542–1566.

[FT02a] M. Fuhrman et G. Tessitore – « The Bismut-Elworthy formula for backward SDE's and applications to nonlinear Kolmogorov equations and control in infinite dimensional spaces », *Stoch. Stoch. Rep.* **74** (2002), no. 1-2, p. 429–464.

[FT02b] — , « Nonlinear Kolmogorov equations in infinite dimensional spaces : the backward stochastic differential equations approach and applications to optimal control », *Ann. Probab.* **30** (2002), no. 3, p. 1397–1465.

[Fuh03] M. Fuhrman – « A class of stochastic optimal control problems in Hilbert spaces : BSDEs and optimal control laws, state constraints, conditioned processes », *Stochastic Process. Appl.* **108** (2003), no. 2, p. 263–298.

[Hen81] D. Henry – *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., vol. 840, Springer-Verlag, 1981.

[HMR15] Y. Hu, P.-Y. Madec et A. Richou – « A probabilistic approach to large time behavior of mild solutions of HJB equations in infinite dimension », *SIAM J. Control Optim.* **53** (2015), no. 1, p. 378–398.

[Mas08] F. Masiero – « Stochastic optimal control problems and parabolic equations in Banach spaces », *SIAM J. Control Optim.* **47** (2008), no. 1, p. 251–300.

[Mat02] J. C. Mattingly – « Exponential convergence for the stochastically forced Navier-Stokes equations and other partially dissipative dynamics », *Comm. Math. Phys.* **230** (2002), p. 421–462.

[MW67] E. J. McShane et R. B. Warfield – « On Filippov's implicit functions lemma », *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967), p. 41–47.

[MZ02] J. Ma et J. Zhang – « Representation theorems for backward stochastic differential equations », *Ann. Appl. Probab.* **12** (2002), no. 4, p. 1390–1418.

[Roy04] M. Royer – « BSDEs with a random terminal time driven by a monotone generator and their links with PDEs », *Stoch. Stoch. Rep.* **76** (2004), no. 4, p. 281–307.