Algèbres enveloppantes et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

Corentin Kilque

Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Poitiers
Maître de stage : Pol Vanhaecke

31 août 2016

Remerciements

Je tenais tout d'abord à remercier mon maître de stage Pol Vanhaecke pour m'avoir consacré son temps, sans doute précieux, et pour m'avoir toujours judicieusement orienté et conseillé lors de nos rendez-vous. Le sujet proposé et nos discussions mathématiques ont rendu cette expérience particulièrement intéressante et enrichissante.

Il me faut aussi remercier Alessandra Sarti, directrice du laboratoire de mathématiques de l'université de Poitiers d'avoir accepté de me recevoir en stage ainsi que l'ensemble de l'équipe du laboratoire et tout particulièrement celle s'occupant de la bibliothèque pour m'avoir si bien accueilli durant ces 6 semaines.

Sommaire

Introduction

Est présenté ici la rapport du stage de 6 semaines que j'ai effectué au laboratoire de mathématiques de l'université de Poitiers, sous la direction de Pol Vanhaecke. Le sujet porte sur les algèbres de Lie, et tout particulièrement les algèbres enveloppantes et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Les algèbres de Lie doivent leur nom au mathématicien norvégien Sophus Lie, qui les a étudié au 19e siècle. Elles jouent un rôle important en mathématiques. Tout d'abord, elles sont très fortement liées aux groupes de Lie, qui sont des variétés différentielles munies d'une opération de multiplication et d'une opération d'inversion toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, à tout groupe de Lie on peut associer une algèbre de Lie, son espace tangent en l'élément neutre, et à toute algèbre de Lie de dimension finie on peut associer un groupe de Lie. Ces derniers sont utilisés entre autres dans l'étude des équations différentielles. Les groupes de Lie, et donc les algèbres de Lie, sont également fondamentaux dans l'étude de symétrie en mathématiques. Enfin, on peut citer une importance des algèbres de Lie dans la théorie des représentations ainsi que dans la théorie des nombres. Les algèbres de Lie ont aussi de nombreuses applications en physique, notamment en physique théorique. En effet, elles sont très utiles dans l'étude de groupes qui interviennent en physique des particules, notamment les groupes de symétries. Les algèbres de Lie interviennent aussi en relativité restreinte, relativité générale, et théorie de l'unification.

Une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie est une algèbre qui vérifie une propriété universelle que l'on définira. D'une part, cette algèbre permet de réduire l'étude des représentations d'une algèbre de Lie à celle des représentations de son algèbre enveloppante, et d'autre part elle fournit, en un sens que l'on verra plus loin, une représentation fidèle de l'algèbre de Lie dont elle provient. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt a plusieurs formes, et porte sur les algèbres enveloppantes, il provient des travaux des trois mathématiciens dont il porte le nom, travaux qui datent du début du 20e siècle. Il permet de mieux saisir la structure de celles-ci, et une de ses formes fournit une base de l'algèbre enveloppante en tant qu'espace vectoriel.

Le rapport s'appuie en grande partie sur la lecture des deux textes suivants : *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* de J. Humphreys [3], et *Lie Algebras* de N. Jacobson [4]. L'introduction aux algèbres de Lie s'inspire du premier chapitre des deux livres, quand la partie sur les algèbres enveloppantes et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt est tirée du cinquième chapitre de chacun des ouvrages. D'autres livres ont été utiles, leur utilisation sera annoncée, et on trouvera la liste des références détaillées dans la bibliographie.

Nous commencerons par introduire la notion d'algèbre et celle plus particulière d'algèbre de Lie, donner des exemples de telles algèbres, étudier les opérations sur les algèbres de Lie et voir les modules et représentations. La seconde partie sera consacrée au produit tensoriel d'espaces vectoriels, nécessaire dans la suite pour construire quelques algèbres importantes, dont l'algèbre enveloppante. Nous définirons donc le produit tensoriel, démontrerons son existence et son unicité à isomorphisme près, construirons deux algèbres grâce à lui, et donnerons la définition du produit tensoriel d'algèbres. Dans une troisième partie, nous nous intéresserons aux algèbres enveloppantes, en donnant d'abord la propriété universelle associée, puis nous démontrons l'unicité et l'existence en la construisant explicitement, et verrons quelques propriétés. Enfin, la dernière partie traitera du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Après des préliminaires nécessaires, nous donnerons deux énoncés du théorème, leur lien, ainsi que quelques conséquences de ce théorème, et nous terminerons le rapport en donnant deux démonstrations peu semblables du théorème.

Dans tout le rapport, $\mathbb{F}$ désigne un corps commutatif.

juin 2016.

1 Algèbres de Lie

1.1 Définition

Définition 1.1. Une *algèbre* $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ qui possède une opération $\times_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bilinéaire pour les lois d'espace vectoriel de $\mathcal{A}$, appelée *produit*. L'algèbre est dite *unitaire* s'il existe un élément unité, noté $1_{\mathcal{A}}$ vérifiant : $\forall a \in \mathcal{A},\ a \times_{\mathcal{A}} 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{A}} a = a$. Si le produit est associatif on parle d'*algèbre associative*, et on note le produit de a et b : $a * b,\ a \cdot b,\ ab, ...$

Définition 1.2. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres associatives unitaires, un *morphisme d'algèbres associatives* de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une application linéaire $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ vérifiant : $\forall a, b \in \mathcal{A},\ f(a \times_{\mathcal{A}} b) = f(a) \times_{\mathcal{B}} f(b)$. On dit que f est *unitaire* si de plus $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Remarque 1.1. Dans la suite, toutes les algèbres associatives seront supposées unitaires, on parlera également par abus d'*algèbre*, pour signifier algèbre associative unitaire. De la même façon, on parlera de *morphisme d'algèbres* à la place de morphisme d'algèbres associatives unitaires.

Définition 1.3. Un *idéal bilatère* d'une algèbre $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel I de $\mathcal{A}$ qui vérifie : $\forall x \in I, \forall a \in \mathcal{A},\ xa \in I$ et $ax \in I$.

Définition 1.4. Pour I un idéal bilatère d'une algèbre $\mathcal{A}$, l'*algèbre quotient* $\mathcal{A}/I$ est l'espace quotient muni de la structure d'algèbre naturelle. L'application $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ de projection canonique est un morphisme d'algèbres surjectif. L'algèbre quotient vérifie la propriété universelle du quotient : pour toute algèbre $\mathcal{B}$ et pour tout morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $I \subset \ker(\varphi)$, φ se factorise par $\mathcal{A}/I$, c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme $\widetilde{\varphi} : \mathcal{A}/I \to \mathcal{B}$ tel que $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi$.

La démonstration est très semblable à celle concernant les anneaux, et également à celle concernant les algèbres de Lie, qui est donnée plus loin.

Définition 1.5. Une *algèbre de Lie* L est une algèbre, dont le produit, noté $[.,.]$, vérifie les axiomes suivants :

(L1) $\forall x \in L,\ [x, x] = 0$;

(L2) $\forall x, y, z \in L,\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi).

Remarque 1.2. Quand un produit vérifie la propriété (L1), on dit qu'il est *alterné*. Lorsque $\mathbb{F}$ n'est pas de caractéristique 2, (L1) équivaut à : $\forall x, y \in L,\ [x, y] = -[y, x]$, en caractéristique 2, ce n'est qu'une conséquence. Cette propriété est appelée l'*antisymétrie*.

Remarque 1.3. L'identité de Jacobi peut se réécrire de deux façons : de manière plus condensé, $[x, [y, z]] + \mathrm{cycl}(x, y, z) = 0$, où $\mathrm{cycl}(x, y, z)$ désigne les deux termes cycliques en x, y, z, et, en utilisant l'antisymétrie, $[x, [y, z]] = [y, [x, z]] + [[x, y], z]$, ce qui montre, en un sens que l'on expliquera plus loin, que $[x, .]$ est une dérivation.

Remarque 1.4. Si $\{x_i, i \in I\}$ est un ensemble générateur de L en tant qu'espace vectoriel, alors, par linéarité, il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour les triplets pris dans cet ensemble.

Définition 1.6. Une *sous-algèbre de Lie* K d'une algèbre de Lie L est un sous-espace vectoriel de L qui est stable par produit : $\forall x, y \in K,\ [x, y] \in K$. On a alors que $(K, [.,.])$ est une algèbre de Lie.

1.2 Exemples

Exemple 1.1. On se donne $(\mathcal{A}, +, *)$ une algèbre (associative), et on définit $\mathcal{A}_L$ comme étant égal à $\mathcal{A}$ en tant qu'espace vectoriel et on le munit de :

$$[.,.] : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_L \times \mathcal{A}_L & \to & \mathcal{A}_L \\ (a, b) & \mapsto & a * b - b * a. \end{array}$$

$(\mathcal{A}, [.,.])$ est alors une algèbre de Lie. En effet, on a $[a, [b, c]] + \mathrm{cycl}(a, b, c) = a(bc - cb) - (bc - cb)a + \mathrm{cycl}(a, b, c) = abc - acb - bca + cba + \mathrm{cycl}(a, b, c) = abc - acb - abc + acb + \mathrm{cycl}(a, b, c) = 0$ car $-bca + cycl(a, b, c) = -abc + cycl(a, b, c)$ et de même pour cba. Le vecteur $[a, b]$ est alors appelé le *commutateur* de a et b.

Exemple 1.2. En particulier, si V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, l'ensemble $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une algèbre associative munie de la composition, on peut donc obtenir une algèbre de Lie comme montré précédemment :

Définition 1.7. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}(V)_L$ est appelée l'*algèbre générale linéaire* de V. Toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ est appelée *algèbre de Lie linéaire.*

Exemple 1.3. Lorsque V est de dimension finie n, on peut le munir d'une base à n éléments, et $\mathrm{End}(V)$ correspond alors à l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ qui est une algèbre associative. On note alors $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) := \mathcal{M}_n(\mathbb{F})_L$ l'algèbre de Lie correspondante.

Exemple 1.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les sous-espaces $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ des matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$, $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ des matrices triangulaires supérieures strictes, et $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ des matrices diagonales sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ car ils sont stables sous la multiplication de l'algèbre associative $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

L'exemple qui suit est l'exemple historique des algèbres de Lie, c'est celui qui a motivé leur introduction.

Exemple 1.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne $(p_i, q_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de coordonnées de $\mathbb{R}^{2n}$, et on munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ du produit $[.,.]$ défini pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ par $[f, g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$. Cela munit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ d'une structure d'algèbre de Lie. En effet, la bilinéarité et la propriété (L1) sont évidentes, et on vérifie l'identité de Jacobi : pour $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on a, après calculs,

$$[f,[g,h]]+\mathrm{cycl}(f,g,h)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j\partial p_i}+\mathrm{cycl}(f,g,h)=0.$$

Car, par exemple,

$$-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j\partial q_i}+\mathrm{cycl}(f,g,h)=-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i}+\mathrm{cycl}(f,g,h).$$

Cette égalité s'obtient en intervertissant le nom des indices, par le lemme de Schwartz, et par cyclicité.

Exemple 1.6. On se donne V un espace vectoriel de dimension finie, et $(\,,\,)$ une forme bilinéaire non dégénérée sur V. Tout endomorphisme f de V possède un endomorphisme adjoint f^* qui vérifie : $\forall x,y\in V,(f(x),y)=(x,f^*(y))$, de plus $f\mapsto f^*$ est linéaire et vérifie $(fg)^*=g^*f^*$. L'ensemble $\mathfrak{S}(V)$ des endomorphismes vérifiant $f^*=-f$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. En effet, on a, si $f,g\in\mathfrak{S}(V)$, $[f,g]^*=(fg)^*-(gf)^*=g^*f^*-f^*g^*=gf-fg=-[f,g]$.

Exemple 1.7. Soit $(\mathcal{A},+,\times)$ une algèbre (qui peut être associative, de Lie, etc) sur $\mathbb{F}$, on dit qu'une application $\mathbb{F}$-linéaire δ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, est une *dérivation* de $\mathcal{A}$ si δ vérifie la règle de Leibniz : $\forall a,b\in\mathcal{A},\delta(a\times b)=a\times\delta(b)+\delta(a)\times b$. On note $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ l'ensemble des dérivations de $\mathcal{A}$, qui est alors une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, et donc une algèbre de Lie linéaire. En effet, on vérifie aisément que si δ,δ' sont des dérivations, $[\delta,\delta']$ en est une aussi (ce qui n'est pas le cas de $\delta\circ\delta'$).

Soit L une algèbre de Lie. Pour x dans L, l'application $\mathrm{ad}_x : y\mapsto[x,y]$ est une application linéaire, de plus, par (L2), comme on l'a vu en remarque 1.3, c'est une dérivation de L. Une telle dérivation est appelée *dérivation intérieure* et on note leur ensemble $\mathrm{Int}(L)$ qui forme une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Der}(L)$. En effet, si x,y sont dans L, et $z\in L$, on a : $[\mathrm{ad}_x,\mathrm{ad}_y](z)=\mathrm{ad}_x\mathrm{ad}_y(z)-\mathrm{ad}_y\mathrm{ad}_x(z)=[x,[y,z]]-[y,[x,z]]=[x,[y,z]]+[y,[z,x]]=-[z,[x,y]]=[[x,y],z]=\mathrm{ad}_{[xy]}(z)$ par (L1) et (L2).

Exemple 1.8. Ici, V est un espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble des endomorphisme de V de trace nulle est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, avec les propriétés de linéarité et de commutativité de la trace. On note cette algèbre de Lie linéaire $\mathfrak{sl}(V)$.

Exemple 1.9. On vérifie facilement que le produit vectoriel fournit à $\mathbb{R}^3$ une structure d'algèbre de Lie.

1.3 Opérations sur les algèbres de Lie

Définition 1.8 (Morphisme)**.** Soit L, L' deux algèbres de Lie, on appelle *morphisme d'algèbres de Lie* entre L et L' toute application linéaire φ de L dans L' qui vérifie :

$$\forall x,y\in L,\ \varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)].$$

On dit que φ est un *monomorphisme* si elle est injective, c'est-à-dire si $\ker \varphi = 0$, un *épimorphisme* si elle est surjective, c'est-à-dire $\operatorname{Im} \varphi = L'$, et un *isomorphisme* si elle est bijective, φ^{-1} est alors un morphisme d'algèbres de Lie. Un *automorphisme* est un isomorphisme de L dans lui-même.

Exemple 1.10. Si K est une sous-algèbre de Lie de L, alors l'inclusion canonique $\imath : K \hookrightarrow L$ est un monomorphisme.

Remarque 1.5. L'image $\mathrm{Im}(\varphi)$ d'un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : L \to L'$ est une sous-algèbre de Lie de L'.

Définition 1.9 (Produit)**.** On définit, pour $(K, [.,.]_K), (L, [.,.]_L)$ des algèbres de Lie l'*algèbre de Lie produit* $K \times L$ comme l'espace produit $K \times L$ que l'on munit de l'opération $[.,.]_{K\times L}$ définie sur un système générateur : pour $x_1, x_2 \in L,\ y_1, y_2 \in K$, on pose :

- $[(x_1, 0), (x_2, 0)]_{K\times L} = ([x_1, x_2]_K, 0)$
- $[(0, y_1), (0, y_2)]_{K\times L} = (0, [y_1, y_2]_L)$
- $[(x_1, 0), (0, y_2)]_{K\times L} = (0, 0)$.

Ce qui donne, après calcul, $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{K\times L} = ([x_1, x_2]_K, [y_1, y_2]_L)$. L'espace $(K \times L, [.,.]_{K\times L})$ est alors une algèbre de Lie.

Remarque 1.6. On vérifie facilement que les application de projection et d'injection canoniques sont des morphismes d'algèbres de Lie :

$$p_1 : \begin{array}{ccc} K \times L & \to & K \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array},\ p_2 : \begin{array}{ccc} K \times L & \to & L \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array},\ i_1 : \begin{array}{ccc} K & \to & K \times L \\ x & \mapsto & (x,0) \end{array},\ i_2 : \begin{array}{ccc} L & \to & K \times L \\ y & \mapsto & (0,y) \end{array}$$

Les projections sont des épimorphismes et les injections des monomorphismes.

Définition 1.10. On définit, pour K, L des sous-algèbres de Lie d'une même algèbre de Lie M, l'espace $[K, L]$ comme le sous espace vectoriel de M engendré par $\{[x, y],\ x \in K, y \in L\}$.

Remarque 1.7. Ce n'est en général pas une sous-algèbre de Lie de M.

Définition 1.11. On appelle *algèbre de Lie dérivée* d'une algèbre de Lie L l'algèbre de Lie $[L, L]$. Il est clair que c'est une sous-algèbre de Lie de L. On dit que L est *abélienne* si $[L, L] = \{0\}$.

On introduit maintenant la notion d'idéal d'une algèbre de Lie. La définition et les résultats qui suivent sont similaires à ceux pour les idéaux d'anneaux par exemple.

Définition 1.12 (Idéal)**.** Un *idéal* I d'une algèbre de Lie L est un sous-espace vectoriel de L qui a la propriété d'absorbance : $\forall x \in I,\ \forall y \in L,\ [x, y] \in I$.

Exemple 1.11. Les deux idéaux triviaux sont $\{0\}$ et L lui même. On vérifie aussi facilement que le *centre* de L : $Z(L) := \{x \in L \mid \forall y \in L, [x, y] = 0\}$, $\ker \varphi$ pour un morphisme d'algèbres de Lie φ et l'algèbre dérivée $[L, L]$ sont des idéaux de L.

Remarque 1.8. On voit que L est abélienne si et seulement si $Z(L) = L$.

Exemple 1.12. Pour une algèbre de Lie L, $\mathrm{Int}(L)$ forme un idéal de $\mathrm{Der}(L)$. En effet, nous savons déjà que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Der}(L)$, et si $x \in L$ et $\delta \in \mathrm{Der}(L)$, pour tout $y \in L$, $[\mathrm{ad}_x, \delta](y) = \mathrm{ad}_x(\delta(y)) - \delta(\mathrm{ad}_x(y)) = [x, \delta(y)] - \delta([x, y]) = [x, \delta(y)] - [x, \delta(y)] - [\delta(x), y] = [-\delta(x), y] = \mathrm{ad}_{-\delta(x)}(y)$. On a donc bien $[\mathrm{Int}(L), \mathrm{Int}(L)] \subset \mathrm{Int}(L)$.

Exemple 1.13. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(V)$ de $\mathfrak{gl}(V)$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(V)$ puisque par propriétés de la trace, le commutateur de deux matrices est de trace nulle.

Exemple 1.14. $K \times \{0\}$ et $\{0\} \times L$ sont des idéaux de $K \times L$.

Définition 1.13. L'intersection d'idéaux d'une algèbre de Lie L est un idéal. On définit alors l'*idéal engendré* par une partie X de L comme le plus petit idéal de L contenant X, il est noté (X), et il est l'intersection de tous les idéaux de L contenant X.

Définition 1.14. Une algèbre de Lie L est dite *simple* si elle est non abélienne et que ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et L.

Remarque 1.9. Lorsque L est simple, on a $Z(L) = \{0\}$ et $[L, L] = L$.

Exemple 1.15. On peut montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ est simple pour $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de 2, cf [3] p.6.

Définition 1.15 (Quotient)**.** Pour une algèbre de Lie L et un idéal I, on définit l'*algèbre de Lie quotient* L/I comme l'espace vectoriel quotient que l'on munit du produit

$$[.,.] : [x + I, y + I] \mapsto [x, y] + I.$$

Remarque 1.10. La définition précédente n'est pas ambigüe. En effet, si $x - x' \in I$ et $y - y' \in I$, $[x + I, y + I] = [x' + I, y' + I]$ car $x' = x + u,\ y' = y + v,\ u, v \in I$ alors $[x' + I, y' + I] = [x', y'] + I = [x + u, y + v] + I = [x, y] + [x, v] + [u, y] + [u, v] + I = [x, y] + I$ car par absorbance, $[x, v], [u, y], [u, v] \in I$. D'autre part, (L1) et (L2) sont vérifiés pour le produit sur L/I, simplement parce qu'ils le sont pour le produit sur L.

Remarque 1.11. On dispose alors d'un épimorphisme d'algèbres de Lie canonique

$$\pi : \begin{array}{ccc} L & \to & L/I \\ x & \mapsto & x + I. \end{array}$$

Proposition 1.16. *Soit un morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : L \to L'$ et un idéal I de L tel que $I \subset \ker \varphi$, alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\psi : L/I \to L'$ tel que $\varphi = \psi \circ \pi$. De plus, si $I = \ker \varphi$ alors ψ est injectif et $L/\ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$ (isomorphisme d'algèbres de Lie).*

Démonstration. On pose pour $x \in L$, $\psi(x + I) = \varphi(x)$, cette définition n'a pas d'ambiguïté car $I \subset \ker \varphi$, et cela définit un morphisme d'algèbres de Lie. On a alors bien $\varphi = \psi \circ \pi$. Si on se donne un morphisme d'algèbres de Lie ψ' qui vérifie l'assertion, alors $\psi'(x +$

$I) = \psi'(\pi(x)) = \varphi(x)$ et donc $\psi' = \psi$, d'où l'unicité. Enfin, supposons que $I = \ker\varphi$. Si $\psi(x+I) = 0$, alors $\varphi(x) = 0$, donc $x \in \ker\varphi = I$, ainsi, $x + I = 0 + I$, et alors ψ est injectif. $\square$

Exemple 1.16. On voit ainsi facilement, avec la remarque 1.6 et l'exemple 1.14 que $(K \times L)/(K \times \{0\}) \cong L$ et $(K \times L)/(\{0\} \times L) \cong K$.

1.4 Modules et Représentations

Définition 1.17. Une *représentation* d'une algèbre associative $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{F}$ est un morphisme d'algèbres entre $\mathcal{A}$ et $\mathrm{End}(V)$ où V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une représentation est dite *fidèle* si le morphisme est injectif.

Définition 1.18. La *représentation régulière* d'une algèbre $\mathcal{A}$ est la représentation :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathrm{End}(\mathcal{A}) \\ a & \mapsto & a_g : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ b & \mapsto & ab \end{array} \end{array}$$

C'est une représentation fidèle.

Démonstration. La bilinéarité du produit d'algèbre nous assure que $a_g \in \mathrm{End}(\mathcal{A})$. De plus, par bilinéarité et associativité, on vérifie facilement que $a \mapsto a_g$ est un morphisme d'algèbres. On vérifie l'injectivité : soit $a \in \mathcal{A}$ tel que a_g soit dans le noyau, c'est-à-dire $\forall b \in \mathcal{A}$, $ab = 0$, or $\mathcal{A}$ est unitaire, ainsi $a = a1 = 0$. $\square$

Définition 1.19. Une *représentation* d'une algèbre de Lie L sur $\mathbb{F}$ est un morphisme d'algèbres de Lie entre L et $\mathfrak{gl}(V)$ où V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une représentation est dite *fidèle* si le morphisme est injectif.

Remarque 1.12. D'après les définitions précédentes, on voit que si on a un morphisme d'algèbres de Lie injectif de L dans $\mathcal{A}_L$ et que $\mathcal{A}$ possède une représentation fidèle, alors on obtient pour L une représentation fidèle. C'est l'objet de l'algèbre enveloppante et du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Définition 1.20. Pour L une algèbre de Lie, un *L-module* V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'une application $\begin{array}{ccc} L \times V & \to & V \\ (l,x) & \mapsto & l \cdot x \end{array}$ bilinéaire vérifiant $[l_1, l_2] \cdot x = l_1 \cdot (l_2 \cdot x) - l_2 \cdot (l_1 \cdot x)$.

Remarque 1.13. Les deux notions sont liées : étant donnée une représentation $l \mapsto \widetilde{l}$ d'une algèbre de Lie L sur $\mathfrak{gl}(V)$, l'application $\begin{array}{ccc} L \times V & \to & V \\ (l,x) & \mapsto & \widetilde{l}(x) \end{array}$ fournit à V une structure de

L-module, et réciproquement, pour un L module V de produit $\begin{array}{ccc} L\times V & \to & V \\ (l,x) & \mapsto & l\cdot x \end{array}$, l'application $\begin{array}{ccc} L & \to & \mathfrak{gl}(V) \\ l & \mapsto & \left| \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & l\cdot x \end{array} \right. \end{array}$ est une représentation de L. En effet, cela provient des deux définitions, qui se correspondent.

Remarque 1.14. On a une notion similaire de $\mathcal{A}$-module où $\mathcal{A}$ est une algèbre associative, et de la même façon, la notion de module et de représentation sont fortement liées.

Remarque 1.15. Si $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation de $(L, [.,.]_L)$, alors on peut munir l'espace vectoriel $L \oplus V$ d'une structure d'algèbre de Lie, avec le produit défini par :

$$[l+v, l'+v']_{L\oplus V} := [l,l']_L + \rho(l)\cdot v' - \rho(l')\cdot v.$$

Définition 1.21. Pour une algèbre de Lie L, L'application $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}_x$ est une représentation de L, elle est appelée la *représentation adjointe* de L.

Démonstration. Vérifions que ad est bien un morphisme d'algèbres de Lie : soit $x, y \in L$, $a \in \mathbb{F}$. On a, pour tout z dans L, d'une part $\mathrm{ad}_{ax+y}(z) = [ax+y, z] = a[x,z] + [y,z] = a\cdot \mathrm{ad}_x(z) + \mathrm{ad}_y(z)$ donc $\mathrm{ad}_{ax+y} = a\cdot \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y$ et d'autre part, $\mathrm{ad}_{[x,y]}(z) = [[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y(z) - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x(z) = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y](z)$ d'où la conclusion. □

Remarque 1.16. Une algèbre de Lie L peut être considérée comme un L-module, avec la multiplication donnée par : $(l,x) \mapsto [l,x]$: la bilinéarité est évidente et l'égalité $[[l_1,l_2],x] = [l_1,[l_2,x]] - [l_2,[l_1,x]]$ correspond à l'identité de Jacobi.

On se donne maintenant $(L, [.,.]_L)$ une algèbre de Lie et $(K, [.,.]_K)$ un L-module qui est aussi une algèbre de Lie, tel que le produit $L \times K \to K$, $(l,x) \mapsto l\cdot x$ soit une dérivation, c'est-à-dire que $l\cdot[x_1,x_2]_K = [l\cdot x_1, x_2]_K + [x_1, l\cdot x_2]_K$. Sous ces hypothèses, on peut donner la définition suivante.

Définition 1.22 (Extension scindée)**.** L'*extension scindée* de L par K, notée $R := L \oplus K$ est la somme directe de L et K en tant qu'espaces vectoriels, que l'on munit du produit $[.,.]_{L\oplus K}$ défini par : $[l_1+x_1, l_2+x_2]_{L\oplus K} := [l_1,l_2]_L + l_1\cdot x_2 - l_2\cdot x_1 + [x_1,x_2]_K$. R est alors une algèbre de Lie.

Démonstration. On montre que $R = L \oplus K$ est une algèbre de Lie : la structure d'espace vectoriel, la bilinéarité et (L1) sont clairs, et on vérifie l'identité de Jacobi pour des triplets pris dans l'ensemble générateur $\{l+0,\ l \in L\} \cup \{0+x,\ x \in K\}$. Pour trois éléments de la forme $l+0$ (resp. $0+x$), l'identité de Jacobi provient de l'identité de Jacobi sur L (resp. K). Pour deux éléments de la forme $l+0$ et un de la forme $0=x$, on a, si $l,m \in L$ et $x \in K$,

$$[x,[l,m]_{L\oplus K}]_{L\oplus K} + [m,[x,l]_{L\oplus K}]_{L\oplus K} + [l,[m,x]_{L\oplus K}]_{L\oplus K} =$$
$$-[l,m]_L\cdot x - [m, l\cdot x]_{L\oplus K} + [l, m\cdot x]_{L\oplus K} = -l\cdot(m\cdot x) + m\cdot(l\cdot x) - m\cdot(l\cdot x) + l\cdot(m\cdot x) = 0.$$

En effet, la première égalité provient de la définition de $[.,.]_{L\oplus K}$, et la seconde de cette même définition et pour le premier terme de la définition d'un L-module. D'autre part, pour un triplet dont deux éléments sont de la forme $0+x$ et un de la forme $l+0$, on a, si $l\in L$ et $x,y\in K$,

$$[x,[y,l]_{L\oplus K}]_{L\oplus K}+[l,[x,y]]_{L\oplus K}+[y,[l,x]_{L\oplus K}]_{L\oplus K}=[x,-l\cdot y]_K+l\cdot[x,y]_K+[y,l\cdot x]_K=\\ -[x,l\cdot y]_K+[l\cdot x,y]_K+[x,l\cdot y]_K+[y,l\cdot x]_K=0.$$

La première égalité est obtenue par définition de $[.,.]_{L\oplus K}$, et la seconde avec l'hypothèse faite plus haut que le produit $\cdot$ soit une dérivation. □

Remarque 1.17. On voit facilement après calculs que dans ce cas, K est un idéal de R, $R/K\cong L$ et L est une sous-algèbre de Lie de R.

Remarque 1.18. L'algèbre de Lie construite dans la remarque 1.15 est un cas particulier de cette définition, si on munit V du produit nul ($\forall v,v'\in V$, $[v,v']=0$) et avec le passage de représentation à L-module.

2 Produit tensoriel

2.1 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Cette section s'appuie en grande partie sur le chap. 6 d'*Algèbre Bilinéaire*, de Michel Cognet, [2] et le chap. 16 d'*Algebra* de Serge Lang, [5]. Dans toute la section E,F et H désigneront des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.

Notation. On note $Bil(E,F;H)$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel des applications bilinéaires de $E\times F$ à valeurs dans H.

On souhaite construire un objet qui permet de factoriser les applications bilinéaires, et de les rendre linéaires. C'est ce que l'on fait ici. Soit $\mathcal{L}(E\times F)$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel de base $E\times F$, c'est-à-dire $\mathcal{L}(E\times F):=\left\{\sum_{i\text{ finies}} c_i(x_i,y_i)\mid c_i\in\mathbb{F},\, x_i\in E,\, y_i\in F\right\}$ où $c(x,y)$ n'a qu'un sens formel mis à part le fait que $c(c'(x,y))=(cc')(x,y)$ et $c(x,y)+c'(x,y)=(c+c')(x,y)$. On caractérise l'égalité par : $c(x,y)=d(z,t)\Leftrightarrow c=d,\, x=z,\, y=t$. On note alors N le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E\times F)$ engendré par l'ensemble des éléments de la forme : $(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$, $(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$, $a(x,y)-(ax,y)$ et $a(x,y)-(x,ay)$ pour a dans $\mathbb{F}$, x,x' dans E et y,y' dans F. On note alors V l'espace quotient $V:=\mathcal{L}(E\times F)/N$. On a $\imath:E\times F\to\mathcal{L}(E\times F)$ l'inclusion canonique et $\pi:\mathcal{L}(E\times F)\to V$ la projection canonique, et on note $b:E\times F\to V$ leur composition, qui est bilinéaire. Montrons que V satisfait notre assertion de départ.

Soit f une application bilinéaire de $E\times F$ dans H. Puisque $\imath(E\times F)$ est une base de $\mathcal{L}(E\times F)$, on a une unique application linéaire induite $\widehat{f}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{L}(E \times F) \arrow[dl, dotted, "\widehat{f}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Or, f est bilinéaire, donc $\widehat{f}$ s'annule sur N, en effet, par exemple, on a $\widehat{f}((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) = \widehat{f}((x+x',y)) - \widehat{f}((x,y)) - \widehat{f}((x',y)) = f(x+x',y) - f(x,y) - f(x',y) = 0$. Ainsi, par la propriété universelle du quotient, $\widehat{f}$ se factorise de manière unique par $\mathcal{L}(E \times F)/N$ via l'application linéaire $\widetilde{f}$, et on a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{L}(E \times F) \arrow[dl, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "\pi"] \\ H & \mathcal{L}(E \times F)/N = V \arrow[l, dotted, "\widetilde{f}"] \end{tikzcd}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[d, "f"'] & V \arrow[dl, dotted, "\widetilde{f}"] \\ H & \end{tikzcd}$$

On a bien la factorisation voulue, et l'application obtenue est bien linéaire. $\widehat{f}$ est unique car $\imath(E \times F)$ est une base de $\mathcal{L}(E \times F)$ et donc $b(E \times F)$ engendre V.

Proposition 2.1 (Propriété universelle du produit tensoriel). *Soit E et F deux $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Il existe V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et $b \in Bil(E,F;V)$ vérifiant la propriété universelle du produit tensoriel (PUPT) définie comme suit : pour tout $\mathbb{F}$-espace vectoriel H, pour toute application $f \in Bil(E,F;H)$, il existe une unique application $\widetilde{f} \in L(V,H)$ telle que $\widetilde{f} \circ b = f$.*

De tels V et b sont uniques à isomorphisme près, c'est-à-dire que si (V',b') vérifie la propriété énoncée plus haut, alors il existe φ un isomorphisme de V dans V' tel que $b' = \varphi \circ b$.

Démonstration. La preuve d'existence a été faite plus haut en construisant l'espace voulu, et l'unicité se fait de la même manière que pour toute propriété universelle, elle sera faite plus loin pour un autre objet, cf proposition 3.2. □

Définition 2.2. On appelle *produit tensoriel* de E et F, et on note $E \otimes F$ tout espace vectoriel V tel qu'il existe $b \in Bil(E,F;V)$ tel que (V,b) vérifie (PUPT). On notera alors, pour $(x,y) \in E \times F$, $b(x,y) = x \otimes y$.

Remarque 2.1. La propriété universelle est alors : pour tout $\mathbb{F}$-espace vectoriel H, pour toute application $f \in Bil(E,F;H)$, il existe une unique application $\widetilde{f} \in L(E \otimes F, H)$ vérifiant, pour tout $(x,y) \in E \times F$, $\widetilde{f}(x \otimes y) = f(x,y)$. En termes de diagramme commutatif, on obtient :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b"'] & H \\ E \otimes F \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, le produit tensoriel permet de transformer des applications bilinéaires en applications linéaires.

Exemple 2.1. La loi produit d'une algèbre $\mathcal{A}$ est la donnée d'une application de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, bilinéaire, ainsi, en utilisant la propriété universelle, la loi produit peut être donnée par une application linéaire de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$.

Remarque 2.2. Puisque b est bilinéaire, on a, pour $(x, y, z, t) \in E \times E \times F \times F$, pour tout $a \in \mathbb{F}$, $(x+y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$, $x \otimes (z+t) = x \otimes z + x \otimes t$ et $(ax) \otimes z = x \otimes (az) = a(x \otimes z)$.

Remarque 2.3. On trouvera dans les deux références des démonstrations du fait que si $\{e_i,\, i \in I\}$ est une base de E et $\{f_j,\, j \in J\}$ une base de F alors $\{e_i \otimes f_j,\, (i, j) \in I \times J\}$ est une base de $E \otimes F$. Dans la suite on aura besoin seulement du caractère générateur, qui s'obtient très facilement par bilinéarité.

Définition 2.3 (Produit tensoriel d'applications)**.** Soit $f \in L(E)$ et $g \in L(F)$, il existe alors une unique application de $L(E \otimes F)$, notée $f \otimes g$, et appelée *produit tensoriel* de f et g, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ (f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y).$$

Démonstration. L'application $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$ appartient à $Bil(E, F; E \otimes F)$ car $(x, y) \mapsto x \otimes y$ est bilinéaire et f et g sont linéaires, donc par (PUPT), on obtient l'existence et l'unicité. □

Proposition 2.4. *Si E, F, G sont trois $\mathbb{F}$-espaces vectoriels, il existe un unique isomorphisme de $E \otimes (F \otimes G)$ vers $(E \otimes F) \otimes G$ qui envoie $x \otimes (y \otimes z)$ sur $(x \otimes y) \otimes z$.*

Démonstration. Cette preuve suit celle donnée p.604 d'*Algebra*, [5]. L'ensemble $\{x \otimes (y \otimes z),\, (x, y, z) \in E \times F \times G\}$ engendre $E \otimes (F \otimes G)$, ce qui assure l'unicité d'une telle application.

Soit $x \in E$. L'application

$$\lambda_x : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & (E \otimes F) \otimes G \\ (y, z) & \mapsto & (x \otimes y) \otimes z \end{array}$$

est bilinéaire, ainsi, par (PUPT), il existe une application linéaire $\widetilde{\lambda_x}$ telle que :

$$\widetilde{\lambda_x} : \begin{array}{ccc} F \otimes G & \to & (E \otimes F) \otimes G \\ y \otimes z & \mapsto & (x \otimes y) \otimes z. \end{array}$$

De la même façon, l'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} E \times (F \otimes G) & \to & (E \otimes F) \otimes G \\ (x, \alpha) & \mapsto & \widetilde{\lambda_x}(\alpha) \end{array}$$

est bilinéaire, ainsi, on obtient $\widetilde{\mu}$

$$\widetilde{\mu} : \begin{array}{ccc} E \otimes (F \otimes G) & \to & (E \otimes F) \otimes G \\ x \otimes \alpha & \mapsto & \widetilde{\lambda_x}(\alpha) \end{array}$$

qui est l'application linéaire recherchée. On construit de la même manière son application réciproque, et on obtient le caractère bijectif. □

Remarque 2.4. On a ainsi montré le caractère associatif à isomorphisme près du produit tensoriel.

Remarque 2.5. On peut définir, de la même manière que $E \otimes F$, le produit tensoriel de n $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $(E_i)_i$ comme l'unique espace vectoriel $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ à isomorphisme près qui satisfait la propriété universelle suivante : pour tout $\mathbb{F}$-espace vectoriel H, pour toute application n-linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to H$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to H$ vérifiant $\widetilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Pour $n = 3$ par exemple, on a alors, $E \otimes (F \otimes G) \cong (E \otimes F) \otimes G \cong E \otimes F \otimes G$, et on écrira alors simplement $E \otimes F \otimes G$ et $x \otimes y \otimes z$.

2.2 Algèbre tensorielle et algèbre symétrique d'un espace vectoriel

On introduit ici deux algèbres particulières, construites à partir d'un espace vectoriel, vérifiant chacune une propriété universelle. Ces deux algèbres seront très importantes dans la suite.

Définition 2.5 (Algèbre tensorielle)**.** Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. On définit l'*algèbre tensorielle* $T(V)$ comme

$$T(V) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} T^m(V), \text{ où } T^m(V) := \bigotimes_{i=1}^{m} V \text{ pour } m \geq 1, \text{ et } T^0(V) := \mathbb{F}.$$

La structure d'espace vectoriel est claire, et on munit l'espace d'une structure d'algèbre (associative unitaire) grâce au produit donné par $\otimes$, distributif par rapport à la somme, et caractérisé ainsi : $(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i) \times (y_1 \otimes y_2 \otimes \cdots \otimes y_j) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_j$ (la définition n'est pas ambigüe, on le montre avec la propriété universelle du produit tensoriel, de la même façon que la proposition 2.4).

Remarque 2.6. Si $\{u_i,\, i \in K\}$ est une base de V, alors $\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $T(V)$ d'après la remarque 2.3. Là encore, dans la suite, seul l'aspect générateur, facile à obtenir, nous intéressera.

Remarque 2.7. L'algèbre tensorielle d'un espace vectoriel V vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre $\mathcal{A}$, toute application linéaire f de V dans $\mathcal{A}$ peut être étendue de manière unique en un morphisme d'algèbres $\widetilde{f} : T(V) \to \mathcal{A}$. En effet, pour $k \geq 1$, l'application

$$f_k : \begin{array}{ccc} V^k & \to & \mathcal{A} \\ (x_1, \dots, x_k) & \mapsto & f(x_1) \dots f(x_k) \end{array}$$

est k-linéaire, et se factorise donc par $V \otimes ... \otimes V = T^k(V)$, on obtient alors l'application linéaire

$$\widetilde{f}_k : \begin{array}{ccc} T^k(V) & \to & \mathcal{A} \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_k & \mapsto & f(x_1) \dots f(x_k). \end{array}$$

On peut ainsi, si on définit $\widetilde{f}_0 : \mathbb{F} \to \mathcal{A}$ l'injection canonique, définir par linéarité l'application linéaire $\widetilde{f} : T(V) \to \mathcal{A}$. On vérifie facilement que $\widetilde{f}$ est alors un morphisme d'algèbres. On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathcal{A} \\ T(V) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

dont on vérifie aisément qu'il est commutatif. L'unicité provient du fait que $\widetilde{f}$ est entièrement déterminée par $\imath(V)$, en effet, si $g : T(V) \to \mathcal{A}$ vérifie $f = g \circ \imath$, on a $g(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = g(x_1) \dots g(x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$.

Notation. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Définition 2.6. On note I le sous-espace vectoriel de $T(V)$ engendré par l'ensemble des éléments de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ dans V et $\sigma \in S_n$.

Proposition 2.7. *I est un idéal bilatère de $T(V)$ et correspond à I', l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$, avec $x, y \in V$.*

Démonstration. Il est clair d'après la définition que I est un idéal bilatère de $T(V)$. D'autre part, I contient tous les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x$, ainsi, $I' \subset I$. L'autre inclusion résulte du fait que les permutations sont engendrées par les transpositions d'éléments consécutifs. En effet, soit $\sigma = \tau_k \dots \tau_1$ une décomposition de σ en produit de transpositions d'éléments consécutifs. On a alors, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\tau_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_1(n)} + x_{\tau_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_1(n)} - x_{\tau_2\tau_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_2\tau_1(n)} + \cdots + x_{\tau_{k-1}\cdots\tau_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_{k-1}\cdots\tau_1(n)} - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$. Or, par exemple, si $\tau_1 = (i, i+1)$, alors, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\tau_1(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau_1(n)} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n - x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes (x_i \otimes x_{i+1} - x_{i+1} \otimes x_i) \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_n \in I'$ par définition. Ainsi, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \in I'$, d'où la conclusion. $\square$

Définition 2.8 (Algèbre symétrique)**.** L'*algèbre symétrique*, notée $S(V)$ est alors l'algèbre quotient $S(V) := T(V)/I$.

Remarque 2.8. Il est évident d'après la définition que $S(V)$ est une algèbre commutative.

Remarque 2.9. Puisque, en des termes que l'on définira plus loin, $T(V)$ est une algèbre graduée et que I est un idéal homogène, on peut écrire $S(V)$ sous la forme d'une algèbre graduée : on note I^m le sous-espace vectoriel de $T^m(V)$ engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}$ pour $x_1, \ldots, x_m$ dans V et σ une permutation, qui forme alors un sous-espace vectoriel de $T^m(V)$, et on note en tant qu'espace vectoriel $S^m(V) := T^m(V)/I^m$ et on a ainsi $S(V) = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} S^m(V)$.

Remarque 2.10. L'algèbre symétrique $S(V)$ vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre commutative $\mathcal{A}$, et toute application linéaire $f : V \to \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{f} : S(V) \to \mathcal{A}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{\imath}"'] & \mathcal{A} \\ S(V) \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\bar{\imath} : V \to S(V)$ est l'application canonique, composée de l'injection canonique $\imath : V \to T(V)$ et la projection canonique $\pi : T(V) \to S(V)$. Pour montrer cela, on commence par appliquer à f la propriété universelle de l'algèbre tensorielle $T(V)$, qui nous donne $\widetilde{f}$ un unique morphisme d'algèbres vérifiant $f = \widetilde{f} \circ \imath$ et défini par :

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} T(V) & \to & \mathcal{A} \\ x_1 \otimes \cdots \otimes x_k & \mapsto & f(x_1)\ldots f(x_k). \end{array}$$

Or, $\widetilde{f}$ s'annule sur l'idéal I de la définition 2.6, car $\widetilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = \widetilde{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) - \widetilde{f}(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = \widetilde{f}(x_1)\ldots\widetilde{f}(x_n) - \widetilde{f}(x_{\sigma(1)})\ldots\widetilde{f}(x_{\sigma(n)}) = 0$ car $\mathcal{A}$ est commutative. On peut donc factoriser $\widetilde{f}$ par $T(V)/I = S(V)$ et on obtient $\overline{f} : S(V) \to \mathcal{A}$ morphisme d'algèbres, et le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathcal{A} \\ T(V) \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "\pi"'] & S(V) \arrow[u, dotted, "\overline{f}"'] \end{tikzcd}$$

qui correspond bien au diagramme voulu. On a la formule pour $\overline{f}$: $\overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k + I) = f(x_1)\ldots f(x_k)$. L'unicité provient du fait que $\overline{f}$ est entièrement déterminé par $\bar{\imath}(V)$.

2.3 Produit tensoriel d'algèbres

Dans la suite, on aura besoin de la notion de produit tensoriel d'algèbre, qu'il ne faut pas confondre avec l'algèbre tensorielle qui ne provient pas forcément d'une algèbre.

Définition 2.9. Si U et V sont deux $\mathbb{F}$-algèbres (pas forcément associatives ni unitaires), on définit le *produit tensoriel d'algèbres*, noté $U \otimes V$, comme le produit tensoriel d'espaces vectoriels que l'on munit d'une structure d'algèbre, avec la loi donnée par :

$$\begin{array}{rcl} (U \otimes V) \times (U \otimes V) & \to & U \otimes V \\ (u \otimes v, u' \otimes v') & \mapsto & uu' \otimes vv'. \end{array}$$

Proposition 2.10. *Si U et V sont associatives (resp. unitaires) alors $U \otimes V$ est associative (resp. unitaire).*

3 Algèbres enveloppantes

3.1 Définition, unicité et propriétés

La définition s'appuie sur une propriété universelle. On rappelle que pour une algèbre associative $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_L$ est définie comme l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathcal{A}$ muni du produit $[a, b] = ab - ba$.

Définition 3.1. Soit L une algèbre de Lie, on dit que $(\mathfrak{A}, \imath)$ où $\mathfrak{A}$ est une algèbre et $\imath$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{A}_L$ est une *algèbre enveloppante* de L si le couple satisfait la propriété universelle suivante : pour toute algèbre $\mathcal{U}$, pour tout morphisme d'algèbres de Lie $\varphi : L \to \mathcal{U}_L$, il existe un unique morphisme d'algèbres ψ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{U}$ tel que $\varphi = \psi \circ \imath$. Soit, en terme d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathcal{U} = \mathcal{U}_L \\ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_L \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Comme tout objet défini par une propriété universelle, il y a unicité à isomorphisme près, c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Si $(\mathfrak{A}, \imath)$ et $(\mathfrak{B}, \jmath)$ sont deux algèbres enveloppantes d'une algèbre de Lie L, alors il existe un unique isomorphisme d'algèbres α de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ qui vérifie $\jmath = \alpha \circ \imath$.*

Démonstration. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\jmath"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathfrak{B}. \\ \mathfrak{A} & \end{tikzcd}$$

Ainsi, en appliquant la propriété universelle que vérifie $(\mathfrak{A}, \imath)$ à l'algèbre $\mathfrak{B}$, on obtient un unique morphisme d'algèbres $\alpha : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tel que $j = \alpha \circ \imath$, ce qui assure l'unicité. De la même façon, on obtient $\alpha' : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ un unique morphisme d'algèbres vérifiant $\imath = \alpha' \circ \jmath$. En résumé, on a :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\jmath"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathfrak{B}. \arrow[dl, dotted, shift left, "\alpha'"] \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, dotted, shift left, "\alpha"] & \end{tikzcd}$$

On a alors $\imath = \alpha' \circ \alpha \circ \imath$ et $\jmath = \alpha \circ \alpha' \circ \jmath$. Or, si on applique la propriété universelle que vérifie $(\mathfrak{A}, \imath)$ à l'algèbre $\mathfrak{A}$ elle-même, on obtient l'unicité d'un morphisme d'algèbres $\imath'$ tel que $\imath = \imath' \circ \imath$, et le morphisme identité Id vérifie cette relation, ainsi, par unicité, $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{Id}$, et de la même façon avec $(\mathfrak{V}, \jmath)$, $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{Id}$, et donc α est un isomorphisme. □

On énonce et on démontre maintenant une série de propriétés, que l'on trouve p.152 de *Lie Algebras*, [4].

Proposition 3.3. *Soit L une algèbre de Lie et $(\mathfrak{A}, \imath)$ son algèbre enveloppante.*

1. *En tant qu'algèbre, $\mathfrak{A}$ est engendré par $\imath(L)$, l'image de L par $\imath$.*
2. *Si $(\mathfrak{A}_1, \imath_1)$ (resp. $(\mathfrak{A}_2, \imath_2)$) est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie L_1 (resp. L_2) et que φ est un morphisme d'algèbres de Lie de L_1 vers L_2, alors il existe un unique morphisme d'algèbres φ' de $\mathfrak{A}_1$ vers $\mathfrak{A}_2$ qui fait commuter le diagramme suivant, c'est-à-dire tel que $\imath_2 \circ \varphi = \varphi' \circ \imath_1$.*

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\imath_1"'] & L_2 \arrow[d, "i_2"] \\ \mathfrak{A}_1 \arrow[r, dotted, "\varphi'"'] & \mathfrak{A}_2 \end{tikzcd}$$

3. *Soit I un idéal de L, $\mathfrak{R}$ l'idéal bilatère de $\mathfrak{A}$ engendré par $\imath(I)$ et $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$ l'algèbre quotient. L'application $j : l + I \mapsto \imath(l) + \mathfrak{R}$ où $l \in L$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L/I dans $\mathfrak{B}_L$, et $(\mathfrak{B}, j)$ est l'algèbre enveloppante de L/I.*
4. *$\mathfrak{A}$ admet un unique anti-automorphisme d'algèbres π (c'est à dire un endomorphisme linéaire bijectif tel que $\pi(ab) = \pi(b)\pi(a)$) tel que $\pi \circ \imath = -\imath$. De plus, $\pi^2 = 1$.*
5. *Il existe un unique morphisme d'algèbres δ' de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, appelé* application diagonale*, tel que, pour l dans L, $\delta' \circ \imath(l) = \imath(l) \otimes 1 + 1 \otimes \imath(l)$.*

Démonstration. 1. On note $\mathfrak{B}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{A}$ engendrée par $\imath(L)$. Le morphisme d'algèbres de Lie $\imath$ peut alors être considéré comme un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{B}_L$, on a donc, par propriété universelle, l'existence d'un morphisme d'algèbres $j : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\imath"] \arrow[d, "\imath"'] & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, dotted, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Or, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, donc on peut considérer j comme un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$, et ainsi, par unicité du morphisme dans la propriété universelle, et puisque l'identité $\mathrm{Id} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ convient, on a $j = \mathrm{Id}$. Ainsi, $\mathfrak{A} = \mathrm{Id}(\mathfrak{A}) = j(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}$, et donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}$ est engendré par $\imath(L)$.

2. L'application $j := \imath_2 \circ \varphi$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L_1 dans $(\mathfrak{A}_2)_L$, ainsi, par propriété universelle de $\mathfrak{A}_1$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\varphi' : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\imath_1"'] \arrow[dr, "j"'] & L_2 \arrow[d, "\imath_2"] \\ \mathfrak{A}_1 \arrow[r, dotted, "\varphi'"'] & \mathfrak{A}_2 \end{tikzcd}$$

D'où le résultat.

3. Montrons l'existence de l'application $\jmath$: l'application $\jmath' : l \mapsto \imath(l) + \mathfrak{R}$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{B}_L$. Or $\imath(I) \subset \mathfrak{R}$, donc $\jmath'$ s'annule sur I, ainsi, par la propriété universelle du quotient, $\jmath'$ se factorise par L/I, ce qui donne $\jmath : L/I \to \mathfrak{B}_L$ un morphisme d'algèbres de Lie tel que $\jmath : l + I \mapsto \imath(l) + \mathfrak{R}$.

Montrons alors que $(\mathfrak{B}, \jmath)$ est une algèbre enveloppante de L/I, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété universelle. Soit $\theta : L/I \to \mathcal{U}_L$ un morphisme d'algèbres de Lie, où $\mathcal{U}$ est une algèbre. On note π la projection canonique de L dans L/I. L'application $\varphi := \theta \circ \pi$ est alors un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathcal{U}_L$, ainsi, par la propriété universelle que vérifie $(\mathfrak{A}, \imath)$, il existe $\psi : \mathfrak{A} \to \mathcal{U}$ un morphisme d'algèbres tel que $\varphi = \psi \circ \imath$. On a, pour l dans L, $\varphi(l) = \theta(\pi(l)) = \theta(l + I)$, ainsi, pour x dans I, $\psi(\imath(x)) = \varphi(x) = \theta(0 + I) = 0$, donc ψ s'annule sur $\imath(I)$, ainsi $\imath(I) \subset \ker(\psi)$, et donc, puisque $\ker(\psi)$ est un idéal, $\mathfrak{R} \subset \ker(\psi)$. On peut alors factoriser ψ par $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} = \mathfrak{B}$, et obtenir $\theta' : \mathfrak{B} \to \mathcal{U}$ un morphisme d'algèbres tel que $\psi = \theta' \circ \pi'$ où $\pi' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est la projection canonique. On a, pour $l + I$ dans L/I, $\theta(l + I) = \varphi(l) = \psi(\imath(l))$ et $\theta'(\jmath(l + I)) = \theta'(\imath(l) + \mathfrak{R}) = \theta'(\pi'(\imath(l))) = \psi(\imath(l))$, et donc, $\theta = \theta' \circ \jmath$. On résume la situation dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[d, "\imath"'] & L/I \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\jmath"] & \mathcal{U} \\ \mathfrak{A} \arrow[rr, "\pi'"'] \arrow[urr, "\psi"] & & \mathfrak{A}/\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \arrow[u, dotted, "\theta'"'] \end{tikzcd}$$

Il reste à montrer l'unicité d'une telle application θ'. Pour se faire, on montre que $\jmath(L/I)$ engendre $\mathfrak{B}$. D'après le point 1., $\mathfrak{A}$ est engendré par $\imath(L)$, et donc $\mathfrak{B}$ est engendré par l'ensemble des éléments $\imath(l) + \mathfrak{R} = \jmath(l + I)$, d'où le résultat.

4. On remarque d'abord que si $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un anti-morphisme d'algèbres, alors $-\mu : \mathcal{A}_L \to \mathcal{B}_L$ est un morphisme d'algèbres de Lie, car $-\mu([a,b]) = -\mu(ab - ba) = -\mu(ab) + \mu(ba) = -\mu(b)\mu(a) + \mu(a)\mu(b) = [-\mu(a), -\mu(b)]$. On se donne $\mathfrak{B}$ une algèbre anti-isomorphe à $\mathfrak{A}$ via $\mu' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. L'existence d'une telle algèbre est assurée par le fait qu'on peut la construire explicitement : on prend $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ en tant qu'espace vectoriel, et si ab dénote le produit de a et b dans $\mathfrak{A}$, on définit le produit $a * b$ dans $\mathfrak{B}$ comme : $a * b = ba$, on vérifie facilement que cela forme alors une algèbre associative, et que l'identité $\mathrm{Id} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un anti-isomorphisme. On note alors $\varphi := -\mu \circ \imath$ qui d'après la remarque préliminaire, est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{B}_L$. D'après la propriété universelle, il existe un unique morphisme d'algèbres $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tel que $\psi \circ \imath = \varphi = -\mu \circ \imath$. On pose alors $\pi := \mu^{-1} \circ \psi$, qui est bien un anti-morphisme d'algèbres de $\mathfrak{A}$ dans lui-même vérifiant $\pi \circ \imath = -\imath$. On a donc $\pi^2 \circ \imath = \imath$, or $\imath(L)$ engendre $\mathfrak{A}$, donc $\pi^2 = \mathrm{Id}$, et π est un anti-automorphisme d'algèbres. L'unicité provient du fait que $\imath(L)$ engendre $\mathfrak{A}$. On résume la situation dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "-\mu"] & \mathfrak{B} \\
L \arrow[u, "\imath"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\imath"'] & \mathfrak{A} \arrow[u, dotted, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

5. On vérifie facilement que l'application $a \mapsto \imath(a) \otimes 1 + 1 \otimes \imath(a)$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_L$, ainsi, par la propriété universelle, on obtient l'existence et l'unicité de δ. □

3.2 Existence par construction

On construit maintenant une algèbre qui vérifie la propriété universelle de l'algèbre enveloppante, ce qui nous en assure l'existence. Pour cela, on utilise l'algèbre tensorielle.

Définition 3.4. Soit L une algèbre de Lie, et J l'idéal de $T(L)$ engendré par les éléments de la forme $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x,\ x, y \in L$. On note alors l'algèbre quotient $U(L) := T(L)/J$ et $\imath$ la composition de l'injection de L dans $T(L)$ et la projection canonique $\pi : T(L) \to U(L)$, comme montré sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, hook] \arrow[dr, dotted, "\imath"'] & T(L) \arrow[d, "\pi"] \\
& U(L).
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.5. *Le couple $(U(L), \imath)$ est une algèbre enveloppante de L.*

Démonstration. On a, pour $x, y \in L$,

$$\imath([x,y]) - [\imath(x), \imath(y)] = \imath([x,y]) - \imath(x) \otimes \imath(y) + \imath(y) \otimes \imath(x) = [x,y] - x \otimes y + y \otimes x + J = 0 + J.$$

En effet, ceci s'obtient par définition de $[.,.]$, de $\imath$ et de J. Ainsi, $\imath$ est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $U(L)_L$. Montrons maintenant que le couple satisfait la propriété universelle : soit $\varphi : L \to \mathcal{U}_L$ un morphisme d'algèbres de Lie, où $\mathcal{U}$ est une algèbre. Soit $\widetilde{\varphi} : T(L) \to \mathcal{U}$ le morphisme d'algèbres obtenu par la propriété universelle de l'algèbre tensorielle. On a, pour x, y dans L, $\widetilde{\varphi}([x,y] - x \otimes y + y \otimes x) = \widetilde{\varphi}([x,y]) - \widetilde{\varphi}(x \otimes y) + \widetilde{\varphi}(y \otimes x) = \widetilde{\varphi}([x,y]) - \widetilde{\varphi}(x) \otimes \widetilde{\varphi}(y) + \widetilde{\varphi}(y) \otimes \widetilde{\varphi}(x) = \varphi([x,y]) - \varphi(x) \otimes \varphi(y) + \varphi(y) \otimes \varphi(x) = 0$, puisque $\widetilde{\varphi}$ est un morphisme d'algèbres, que $\widetilde{\varphi}$ et φ coïncident sur L, et que φ est un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi, $\{[x,y] - x \otimes y + y \otimes x \mid x, y \in L\} \subset \ker(\widetilde{\varphi})$ et donc $J \subset \ker(\widetilde{\varphi})$. On peut donc factoriser $\widetilde{\varphi}$ par $T(L)/J = U(L)$ et obtenir un unique morphisme d'algèbres $\psi : U(L) \to \mathcal{U}$ tel que $\widetilde{\varphi} = \psi \circ \pi$. On a, pour $x \in L$, $\psi(\imath(x)) = \psi(x + J) = \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, donc $\varphi = \psi \circ \imath$. L'unicité s'obtient avec le fait que ψ est entièrement déterminé par $\imath(L)$. □

4 Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

On s'intéresse maintenant au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, qui a plusieurs énoncés. L'un d'eux donne une base de l'algèbre enveloppante. Un des principaux intérêts de ce théorème est qu'il nous assure qu'il existe un isomorphisme entre L et une sous-algèbre de Lie de $U(L)_L$. On commence par introduire des notions nécessaires afin de pouvoir l'énoncer, puis nous en donnons deux formes, démontrons des corollaires, et enfin nous démontrons de deux manières le théorème.

4.1 Préliminaires

Définition 4.1 (Algèbre graduée)**.** Une algèbre $\mathcal{A}$ est dite *graduée* (sur $\mathbb{N}$) si $\mathcal{A}$ s'écrit $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ où $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}$ tels que $A^i A^j \subset A^{i+j}$. On a $1 \in A^0$. Un *élément homogène de degré i* est un élément de A^i, et tout élément $t \in \mathcal{A}$ admet une unique décomposition $t = t_0 + \cdots + t_m$ en éléments homogènes ($t_i \in A^i$). Un élément t_i est alors appelé une *composante homogène* de t ou plus précisément la *composante homogène de degré i* de t.

Définition 4.2 (Algèbre filtrée)**.** Une algèbre $\mathcal{A}$ est dite *filtrée* (sur $\mathbb{N}$) si $\mathcal{A}$ s'écrit $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ où $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}$ tels que $A_i A_j \subset A_{i+j}$, $A_i \subset A_{i+1}$ et $1 \in A_0$.

Remarque 4.1. On des définition analogue d'espace vectoriel filtré et gradué.

Proposition 4.3. *Une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$ est aussi filtrée, où la filtration $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est définie par : $A_i := \bigoplus_{j=0}^{i} A^j$.*

Démonstration. La vérification est immédiate. □

Proposition 4.4. *On peut associer à un algèbre filtrée $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ l'espace vectoriel gradué $\mathcal{A}' := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i$, où la graduation est définie par : $A^i := A_i/A_{i-1}$ avec $A_{-1} = \{0\}$.*

Démonstration. Là encore, c'est immédiat. □

Proposition 4.5. *Pour $i, j \in \mathbb{N}$, l'application bilinéaire*

$$\begin{array}{ccc} A^i \times A^j & \to & A^{i+j} \\ (a + A_{i-1}, b + A_{j-1}) & \mapsto & ab + A_{i+j-1}. \end{array}$$

est bien définie.

Démonstration. Il s'agit de montrer que le résultat du produit ne dépend pas du choix du représentant de la classe d'équivalence. Soit $a_i, a_i' \in A_i$, $b_j, b_j' \in A_j$ tels que $a_i - a_i' \in A_{i-1}$ et $b_j - b_j' \in A_{j-1}$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A_{i-1}$ et $b \in A_{j-1}$ tels que $a_i = a_i' + a$ et $b_j = b_j' + b$. On a alors $a_ib_j = a_i'b_j' + a_i'b + ab_j' + ab$, or, $a_i'b, ab_j', ab \in A_{i+j-1}$ par définition d'une filtration. Ainsi, $a_ib_j + A_{i+j-1} = a_i'b_j' + A_{i+j-1}$. □

Définition 4.6. On peut alors étendre ce produit par linéarité à $\mathcal{A}' := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i$ ce qui donne à $\mathcal{A}'$ une structure d'algèbre associative unitaire.

Exemple 4.1. Si on se donne $\mathbb{F}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}$, on voit facilement quelle structure d'algèbre graduée et d'algèbre filtrée on peut lui donner grâce au degré, et comment passer de l'une à l'autre.

Définition 4.7 (Idéal homogène)**.** Un *idéal homogène* d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i$ est un idéal bilatère I de $\mathcal{A}$ engendré par des éléments homogènes.

Exemple 4.2. L'idéal I utilisé pour définir l'algèbre symétrique est homogène.

La suite, jusqu'à l'exemple 4.3 exclu, s'appuie sur [1].

Proposition 4.8. *Soit I un idéal d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i$. On a alors équivalence entre les propositions suivantes :*

(i) I est un idéal homogène ;

(ii) Si $t \in I$, alors toute composante homogène de t appartient à I ;

(iii) I est la somme des $A^i \cap I$.

Démonstration. Puisque tout élément de I s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des A^i, l'équivalence entre (ii) et (iii) est immédiate. Pour la même raison, on voit facilement que (iii) implique (i) Il nous reste à montrer que (i) implique (ii) : soit $(x_k)_{k\in K}$ un famille de générateurs homogènes de I, et n_k le degré de x_k. Soit $t \in I$, t s'écrit $t = \sum_{k\in K} a_kx_k$, et tout a_k s'écrit de manière unique $a_k = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{k,j}$. Ainsi, $t = \sum_{k\in K}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{k,j}x_k = \sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{n_k+j=l} a_{k,j}x_k$, et donc, par unicité de décomposition en éléments homogènes, tout élément homogène de t appartient à I. □

Remarque 4.2. Sous l'une des hypothèses équivalentes de la proposition précédente, I est alors somme directe des $A^i \cap I$.

Proposition 4.9. *Si I est un idéal homogène d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A^i$, alors l'algèbre $\mathcal{A}/I$ est une algèbre graduée, dont la graduation est donnée par : $\mathcal{A}/I = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(A^i + I)/I$.*

La démonstration découle facilement de la proposition suivante, admise (cf [1]).

Proposition 4.10. *Si I est un idéal d'une algèbre graduée $\mathcal{A} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k$ tel que $I = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} I^k$ où I^k est un idéal de A^k alors $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k/I^k \cong (\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k)/(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} I^k)$.*

Démonstration. (Proposition 4.9) D'après la proposition précédente, $\mathcal{A}/I \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k/(A^k \cap I)$. D'autre part, on a $(A^i + I)/I \cong A^i/(A^i \cap I)$. En effet, grâce au morphisme d'injection et celui de projection, on a un morphisme surjectif de A^i dans $(A^i + I)/I$, et on vérifie facilement que son noyau est exactement $A^i \cap I$, et on obtient alors l'isomorphisme. Enfin, on voit facilement que $[(A^i + I)/I][(A^j + I)/I] \subset (A^{i+j} + I)/I$ □

Exemple 4.3. La graduation $S(V) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} S^m(V)$ où $S^m(V) := T^m(V)/I^m$ est obtenue de cette manière.

Proposition 4.11. *Si I est un idéal bilatère quelconque d'une algèbre filtrée $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, alors l'algèbre $\mathcal{A}/I$ est une algèbre filtrée, dont la filtration est donnée par : $\mathcal{A}/I = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi(A_i)$ où $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$ est la projection canonique.*

Démonstration. La démonstration est immédiate. □

Dans toute la suite, on se donne L une algèbre de Lie, et on note, pour plus de commodité, $\mathfrak{T} = T(L)$, $\mathfrak{S} = S(L)$, $\mathfrak{U} = U(L)$ et d'autre part $T^m = T^m(L)$ et $S^m = S^m(L)$. On rappelle que I est l'idéal utilisé pour la construction de $\mathfrak{S}$ et J pour la construction de $\mathfrak{U}$. On fixe également la notation des applications $\pi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{U}$ et $\pi' : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ de projections canoniques ainsi que $\imath$ comme défini plus haut. Enfin, le produit dans $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{U}$) sera simplement noté xy pour x, y dans $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{U}$).

Définition 4.12. $\mathfrak{T} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} T^m$ est une graduation, on note alors $T_m := \bigoplus_{i=0}^{m} T^i$ les éléments de la filtration associée $\mathfrak{T} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} T_m$.

On note alors $\mathfrak{U} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$ la projection de cette filtration dans $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire que pour $m \in \mathbb{N}$, $U_m := \pi(T_m)$.

Enfin, on note $\mathfrak{G} := \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} G^m$ la graduation associée à la filtration $\mathfrak{U} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_m$, c'est-à-dire que $G^m := U_m/U_{m-1}$ et $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{U}$.

Définition 4.13. On définit, pour $m \in \mathbb{N}$, l'application linéaire φ_m comme la composée des applications $\varphi_m : T^m \to U_m \to G^m$ ce qui a un sens puisque $T^m \subset T_m$. On peut alors définir $\varphi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{G}$.

Remarque 4.3. L'application φ_m est surjective, et donc φ l'est aussi. En effet, un élément de G^m s'écrit $(\sum_{i=1}^{r} x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i + J) + U_{m-1}$ où $x_i^j \in L$ et $0 \leq k(i) \leq m$. Or, pour i tel que $0 \leq k(i) < m$, $x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i \in T^{k(i)} \subset T_{m-1}$ donc $x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i + J \in \pi(T_{m-1}) = U_{m-1}$ donc $(\sum_{i=1}^{r} x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i + J) + U_{m-1} = (\sum_{i=1,\, k(i)=m}^{r} x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i + J) + U_{m-1} = \varphi_m(\sum_{i=1,\, k(i)=m}^{r} x_1^i \otimes \cdots \otimes x_{k(i)}^i)$.

Remarque 4.4. Par définition du produit dans $\mathfrak{G}$, l'application φ est un morphisme d'algèbres.

Définition 4.14. On a $\varphi(I) = 0$, on définit ainsi le morphisme d'algèbres induit $\omega : \mathfrak{S} = \mathfrak{T}/I \to \mathfrak{G}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathfrak{G} \\
& \mathfrak{S} = \mathfrak{T}/I \arrow[u, dotted, "\omega"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $x \otimes y - y \otimes x$ un élément de $\mathfrak{T}$, on a $\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$ par définition de π et U_2, et ainsi $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2/U_1$. D'autre part, $\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1$ par définition de $\mathfrak{U}$, π et U_1, et donc $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_1/U_1 = \{0\}$. □

4.2 Énoncés

Plusieurs énoncés portent le nom de théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (théorème PBW), nous donnons ici deux d'entre eux, l'un étant une conséquence de l'autre, mais pouvant être démontré indépendamment.

Théorème 4.15 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *L'application $\omega : \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Remarque 4.5. D'après la remarque 4.3, on a déjà la surjectivité, il faut donc montrer seulement l'injectivité.

On présente alors un corollaire fondamental pour la suite.

Corollaire 4.16. *Soit W un sous-espace vectoriel de T^m tel que $\pi' : T^m \to S^m$ soit un isomorphisme de W dans S^m, alors $\pi(W)$ est un supplémentaire de U_{m-1} dans U_m, i.e. $U_m = U_{m-1} \oplus \pi(W)$.*

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& U_m \arrow[dr, "\pi\text{''}"] & \\
T^m \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & G^m \\
& S^m \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

où π" est la projection canonique. Le théorème PBW (4.6) nous assure que la flèche du bas est un isomorphisme de W dans G^m. On en déduit donc que la flèche du haut est aussi un isomorphisme de W dans G^m. Montrons que $U_m = U_{m-1} \oplus \pi(W)$: soit $z \in U_m$, on a $z+U_{m-1} \in G^m$, donc il existe un unique $x \in W$ tel que $\pi"(\pi(x)) = \pi(x)+U_{m-1} = z+U_{m-1}$, c'est-à-dire, si $y := \pi(x)$, tel que $z - y \in U_{m-1}$. On a donc obtenu $U_m = U_{m-1} + \pi(W)$. Soit maintenant $y \in U_{m-1} \cap \pi(W)$, on a alors $y = \pi(x)$ pour un certain $x \in W$, et d'autre part, $\pi"(y) = \pi"(\pi(x)) = 0$, ainsi, par injectivité de $\pi" \circ \pi$, $x = 0$ et donc $y = 0$. On a bien $U_m = U_{m-1} \oplus \pi(W)$ comme annoncé. □

Corollaire 4.17 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Soit $\{u_i,\, i \in K\}$ un base de L, où K est un ensemble totalement ordonné, alors l'ensemble*

$$\{1\} \cup \left\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + J \mid n \in \mathbb{N}^*, i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(n)\right\}$$

forme une base de $\mathfrak{U}$.

Ici, on démontre ce corollaire à l'aide du corollaire précédent du théorème 4.15, mais il sera démontré plus loin sans l'aide de celui-ci.

Démonstration. On montre tout d'abord que c'est une famille génératrice. On rappelle que $\mathfrak{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. On note W^m le sous-espace vectoriel de T^m engendré par $\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)} \mid i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(m)\}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ et par $\{1\}$ pour $m = 0$. On montre par récurrence que $U_m = \bigoplus_{k=0}^m \pi(W^k)$. Il est évident que $U_0 = \pi(W^0) = \pi(\mathbb{F}) = \pi(T^0) = \pi(T_0)$. D'autre part, W^m est isomorphe à S^m. En effet, en se rapportant aux notations de la remarque 2.9, soit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m + I^m \in S^m$, et $\sigma \in S_m$ telle que $i_{\sigma(1)} \leq \cdots \leq i_{\sigma(m)}$, on a alors, par définition de I^m, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m + I^m = x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)} + I^m$, d'où l'assertion. On peut donc appliquer le corollaire 4.16 à W^m et obtenir : $U_m = U_{m-1} \oplus \pi(W^m) = \pi(W^0) \oplus \cdots \oplus \pi(W^m)$ par hypothèse de récurrence, et l'aspect générateur est alors clair.

Il reste à montrer que la famille est libre. Du fait de la somme directe, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$, et il suffit de montrer que la famille $\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)} + J \mid i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(m)\}$ est libre. On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m + J) = 0$, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m) \in J$. On vérifie facilement que tout élément de J s'écrit $\sum_{i=1}^p \mu_i(v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^{k_i} \otimes ([u^i, v^i] - u^i \otimes v^i + v^i \otimes u^i) \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^{l_i})$ où v_i^j, w_i^j, u^i, v^i sont des éléments de la base de L, et on suppose que $k_1 + l_1 \leq \cdots \leq k_p + l_p$. On a alors,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^m) = \sum_{i=1}^p \mu_i(v_i^1 \otimes \cdots \otimes v_i^{k_i} \otimes ([u^i, v^i] - u^i \otimes v^i + v^i \otimes u^i) \otimes w_i^1 \otimes \cdots \otimes w_i^{l_i}).$$

On peut alors, puisque $\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(q)},\, q \in \mathbb{N}^*, i(j) \in K\}$ forme une base de $\mathfrak{T}$, utiliser l'unique décomposition dans la base. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ (on procède par i décroissant, pour éviter les simplifications), il existe $i_0, j_0 \in K$ tels que $u^i = u_{i_0}$ et $v^i = u_{j_0}$, et soit $i_0 \leq j_0$, soit $j_0 \leq i_0$, dans tous les cas, puisque dans le membre de gauche les indices sont ordonnés, on obtient $\mu_i = 0$. Ainsi, $\sum_{i=1}^n \lambda_i(u_i^1 \otimes \cdots \otimes u_i^n) = 0$, et puisque les termes de la somme appartiennent à la base de $\mathfrak{T}$ et sont donc libres, on obtient finalement $\lambda_i = 0$ pour tout i entre 1 et n, et la famille est libre. □

On énonce et démontre maintenant un corollaire qui met en lumière toute l'utilité des algèbres enveloppantes.

Corollaire 4.18. *L'application $\imath : L \mapsto \mathfrak{U}$ est injective.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent (4.17), $\{u_k + J,\, k \in K\}$ forme une famille libre, ainsi, si $l = \sum_k \lambda_k u_k \in \ker(\imath)$, $l + J = (\sum_k \lambda_k u_k) + J = \sum_k \lambda_k (u_k + J) = 0 + J$ et donc $\forall k$, $\lambda_k = 0$ et ainsi $l = 0$. □

Remarque 4.6. On peut alors identifier L et $\imath(L)$. Ainsi, la propriété universelle que vérifie l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}$ se réécrit : pour toute algèbre $\mathcal{U}$, tout morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathcal{U}_L$ s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbres de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{U}$. On remarque alors que toute représentation de L s'étend de manière unique en une représentation de $\mathfrak{U}$ et réciproquement, toute représentation de $\mathfrak{U}$ donne par restriction une représentation de L.

Remarque 4.7. On a donc d'après le corollaire une injection de L dans $\mathfrak{U}_L$, or on sait d'après la définition 1.18 que toute algèbre possède une représentation fidèle, que l'on note ici $g : a \mapsto a_g$ où $a_g : b \mapsto ab$. Ainsi, $g \circ \imath$ est d'une part une injection, et d'autre part une représentation de L, car c'est bien un morphisme d'algèbres de Lie de L dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{U})$. On a donc obtenu une représentation fidèle de L, et on a montré la proposition suivante.

Proposition 4.19. *Toute algèbre de Lie possède une représentation fidèle.*

On démontre maintenant le dernier corollaire important du théorème PBW.

Remarque 4.8. D'après le corollaire précédent, on remarque le fait suivant. Si L est incluse (ou s'injecte) dans $\mathfrak{A}_L$ où $\mathfrak{A}$ est une algèbre telle que si $\{u_i,\, i \in I\}$ est une base de L où I est totalement ordonné alors $\{1\} \cup \{u_{i(1)} \dots u_{i(n)} \mid i(1) \leq \dots \leq i(n)\}$ forme une base de $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{A}$ est une algèbre enveloppante de L. En effet, on a un morphisme d'algèbres entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{U}$ donné par l'extension du morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{A} \supset L \to L \subset \mathfrak{U}$ induit par les injections de L dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{U}$. De plus, par correspondance des bases de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{U}$, ce morphisme est bijectif.

Dans toute la suite, on se fixe $\{u_i,\, i \in K\}$ une base de L où K est totalement ordonné.

Corollaire 4.20. *Soit H une sous-algèbre de Lie de L, on suppose de plus que $K = I \cup L$, avec $I \cap L = \emptyset$ et que $\{u_i,\, i \in I\}$ est une base de H. Alors la sous-algèbre $U(H)$ de $U(L)$ engendrée par H (i.e. par son injection dans $U(L)$) est une algèbre enveloppante pour H, d'où la notation $U(H)$.*

Démonstration. On vérifie facilement que $\{1\} \cup \{u_{i(1)} \otimes \dots \otimes u_{i(n)} \mid i(j) \in I,\, n \in \mathbb{N}^*,\, i(1) \leq \dots \leq i(n)\}$ est une base de $U(H)$, on conclut donc par la remarque précédente. □

4.3 Première démonstration

Cette partie est consacrée à une démonstration du théorème sous sa première forme énoncée, rappelée plus bas. Après avoir donné des notations, on démontre trois lemmes qui se déduisent chacun du précédent et dont le dernier nous donne le théorème.

Théorème 4.21 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *L'application $\omega : \mathfrak{S} \to \mathfrak{G}$ est un isomorphisme d'algèbres.*

On note $v_i := u_i + I$ la projection d'un élément de la base de L dans $\mathfrak{S}$, et on rappelle qu'on note le produit de x, y dans $\mathfrak{S}$ simplement xy. On peut alors identifier $\mathfrak{S}$ avec l'algèbre des polynômes d'indéterminées v_i, $i \in K$. Pour un m-uplet $\Sigma = (i_1, \ldots, i_m)$ de longueur m, on définit $v_\Sigma := v_{i_1} \ldots v_{i_m}$ et $u_\Sigma := u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_m}$, d'autre part, on dit que $\Sigma = (i_1, \ldots, i_m)$ est *croissant* si $i_1 \leq \cdots \leq i_m$. On se donne la convention que $\emptyset$ est croissant et que $v_\emptyset = 1$, on voit alors que $\{v_\Sigma, \Sigma \text{ croissant}\}$ est une base de $\mathfrak{S}$. Pour $i \in K$, on dit que $i \leq \Sigma$ si $i \leq j$, $\forall j \in \Sigma$. Enfin, on note $S_m := S^0 \oplus \cdots \oplus S^m$ la filtration associée à $\mathfrak{S} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} S^m$ et $S_{-1} := \emptyset$.

Lemme 4.22 (Lemme 1)**.** *Pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe une unique application linéaire $f_m : L \otimes S_m \to \mathfrak{S}$ satisfaisant :*

(A_m) $f_m(u_i \otimes v_\Sigma) = v_i v_\Sigma$ *pour* $i \leq \Sigma$ *et* $v_\Sigma \in S_m$.

(B_m) $f_m(u_i \otimes v_\Sigma) - v_i v_\Sigma \in S_k$ *pour* $k \leq m$, $v_\Sigma \in S_k$.

(C_m) $f_m(u_i \otimes f_m(u_j \otimes v_T)) = f_m(u_j \otimes f_m(u_i \otimes v_T)) + f_m([u_i, u_j] \otimes v_T)$ *pour tout* $v_T \in S_{m-1}$.

De plus, la restriction de f_m à $L \otimes S_{m-1}$ coïncide avec f_{m-1}.

Démonstration. On remarque tout d'abord que si on a montré (B_m), alors les termes intervenant dans (C_m) sont tous bien définis. D'autre part, on voit immédiatement que la restriction de f_m à $L \otimes S_{m-1}$ satisfait (A_{m-1}), (B_{m-1}) et (C_{m-1}), ainsi, par unicité, elle coïncide avec f_{m-1}. On montre alors l'existence et l'unicité d'une telle application par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$. L'initialisation s'obtient facilement, puisque seul $v_\Sigma = 1$ est à considérer, (A_0) impose donc $f_0(u_i \otimes 1) = v_i$ et on prolonge l'application par linéarité, on obtient alors l'unicité. On a ensuite directement (A_0) et (B_0), et il n'y a rien à vérifier pour (C_0) puisque $S_{-1} = \emptyset$.

Pour l'hérédité, on suppose construite f_{m-1}, pour un certain $m \geq 1$ et on cherche à prolonger f_{m-1} en une application f_m. Il suffit de définir f_m sur les éléments d'un ensemble générateur où elle n'est pas encore définie, ainsi, d'après la remarque 2.6, il suffit de définir $f_m(u_i \otimes v_\Sigma)$ pour Σ croissant de longueur m, on la prolonge alors par linéarité.

Pour que (A_m) soit vérifiée, on doit avoir $f_m(u_i \otimes v_\Sigma) = v_i v_\Sigma$ pour $i \leq \Sigma$. Si on a pas $i \leq \Sigma$, on définit $f_m(u_i \otimes v_\Sigma)$ avec la condition imposée par (C_m). On a, puisque Σ est croissant, si $\Sigma = (j, T)$, $j < i$, et évidemment, $j \leq T$. Ainsi, $f_m(u_j \otimes v_T) = v_j v_T = v_\Sigma$ par (A_{m-1}), on a donc dans le membre de gauche de (C_m) l'élément que l'on cherche à définir. Pour le membre de droite, par (B_{m-1}) (hypothèse de récurrence) on a l'existence de

$w \in S_{m-1}$ tel que $f_m(u_i \otimes v_T) = f_{m-1}(u_i \otimes v_T) = v_i v_T + w$, ainsi, $f_m(u_j \otimes f_m(u_i \otimes v_T)) = f_m(u_j \otimes (v_i v_T + w)) = f_m(u_j \otimes (v_i v_T)) + f_m(u_j \otimes w) = v_j v_i v_T + f_m(u_j \otimes w)$ car $j \leq (i, T)$. Enfin, $f_m([u_i, u_j] \otimes v_T) = f_{m-1}([u_i, u_j] \otimes v_T)$, donc :

$$f_m(u_i \otimes v_\Sigma) = v_j v_i v_T + f_m(u_j \otimes w) + f_{m-1}([u_i, u_j] \otimes v_T).$$

On a donc défini de manière unique l'application f_m. Il reste à montrer qu'elle vérifie (A_m), (B_m) et (C_m). (A_m) et (B_m) découlent directement des définitions que l'on a données, et puisque on a utilisé (C_m) pour le cas $j < i$ et $j \leq T$, (C_m) est vérifié dans cette situation. En partant de cette égalité, et si on inverse le rôle de i et j, puisque $[u_i, u_j] = -[u_j, u_i]$, (C_m) est vérifié dans le cas $i < j$ et $i \leq T$. Le cas $i = j$ est évident avec $[u_i, u_i] = 0$. Il nous reste donc le cas où on a ni $i \leq T$ ni $j \leq T$. On note alors $T = (k, \Psi)$, et ainsi, $k \leq \Psi$, $k < i$ et $k < j$. Pour alléger les notations on écrira dans la suite uv pour $f_m(u \otimes v)$ où $u \in L$ et $v \in \mathfrak{S}$, cette notation est bilinéaire car f_m est linéaire et le produit tensoriel est bilinéaire.

On souhaite exprimer $u_i(u_j v_T)$ et $u_j(u_i v_T)$. L'idée est de se ramener à des cas où on peut utiliser (C_m) et (C_{m-1}), en utilisant (A_m) et (B_m). Avec (A_{m-1}) puis (C_{m-1}) on a $u_j v_T = u_j(u_k v_\Psi) = u_k(u_j v_\Psi) + [u_j, u_k] v_\Psi$, d'autre part, avec (B_{m-1}) on obtient l'existence de $w \in S_{m-2}$ tel que $u_j v_\Psi = v_j v_\Psi + w$ (1). On a donc, $u_i(u_j v_T) = u_i(u_k(v_j v_\Psi)) + u_i(u_k w) + u_i([u_j, u_k] v_\Psi)$. On applique alors (C_m) au premier terme du membre de droite ce qui est licite car $k < j$ et $k \leq \Psi$ et (C_{m-1}) aux deux termes suivants. On obtient alors $u_i(u_j v_T) = u_k(u_i(v_j v_\Psi)) + [u_i, u_k](v_j v_\Psi) + u_k(u_i w) + [u_i, u_k] w + [u_j, u_k](u_i v_\Psi) + [u_i, [u_j, u_k]] v_\Psi$, or, d'après (1), $u_k(u_i(v_j v_\Psi)) = u_k(u_i(u_j v_\Psi)) - u_k(u_i w)$ et $[u_i, u_k](v_j v_\Psi) + [u_i, u_k] w = [u_i, u_k](u_j v_\Psi)$. On obtient alors la relation :

$$u_i(u_j v_T) = u_k(u_i(u_j v_\Psi)) + [u_i, u_k](u_j v_\Psi) + [u_j, u_k](u_i v_\Psi) + [u_i, [u_j, u_k]] v_\Psi. \tag{1}$$

Les rôles de i et j sont symétriques ici, ainsi, on peut obtenir la relation :

$$u_j(u_i v_T) = u_k(u_j(u_i v_\Psi)) + [u_j, u_k](u_i v_\Psi) + [u_i, u_k](u_j v_\Psi) + [u_j, [u_i, u_k]] v_\Psi. \tag{2}$$

On soustrait alors (2) à (1), et on a, en remarquant que les deux termes du milieu se simplifient :

$$u_i(u_j v_T) - u_j(u_i v_T) = u_k(u_i(u_j v_\Psi)) - u_k(u_j(u_i v_\Psi)) + [u_i, [u_j, u_k]] v_\Psi - [u_j, [u_i, u_k]] v_\Psi.$$

Or, $u_k(u_i(u_j v_\Psi)) - u_k(u_j(u_i v_\Psi)) = u_k(u_i(u_j v_\Psi) - u_j(u_i v_\Psi)) = u_k([u_i, u_j] v_\Psi) = [u_i, u_j](u_k v_\Psi) + [u_k, [u_i, u_j]] v_\Psi$ en appliquant deux fois (C_{m-1}). On a alors, avec $[u_i, u_k] = -[u_k, u_i]$:

$$u_i(u_j v_T) - u_j(u_i v_T) = [u_i, u_j](u_k v_\Psi) + [u_k, [u_i, u_j]] v_\Psi + [u_i, [u_j, u_k]] v_\Psi + [u_j, [u_k, u_i]] v_\Psi = [u_i, u_j](u_k v_\Psi) = [u_i, u_j] v_T$$

avec l'identité de Jacobi et (A_{m-1}). On a donc montré (C_m), ce qui conclut la preuve. □

Lemme 4.23 (Lemme 2)**.** *Il existe une représentation $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$ vérifiant :*

(a) $\rho(u_i)(v_\Sigma) = v_i v_\Sigma$ *pour* $i \leq \Sigma$

(*b*) *$\rho(u_i)(v_\Sigma) - v_i v_\Sigma \in S_m$ si Σ est de longueur m.*

Démonstration. Ce lemme s'obtient assez facilement du lemme précédent. En effet, d'après celui-ci, on peut définir une application linéaire $f : L \otimes \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ vérifiant pour tout $m \in \mathbb{N}$ (A_m), (B_m) et (C_m), grâce à l'assertion sur la restriction de f_m. On définit alors :

$$\rho : \begin{array}{ccl} L & \to & \mathfrak{gl}(\mathfrak{S}) \\ u & \mapsto & \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & \to & \mathfrak{S} \\ v & \mapsto & f(u \otimes v). \end{array} \right. \end{array}$$

On remarque tout d'abord que grâce à la linéarité de f et la bilinéarité du produit tensoriel, $v \mapsto f(u \otimes v)$ est bien un endomorphisme linéaire de $\mathfrak{S}$. Pour la même raison, ρ est une application linéaire. Il reste à montrer que $\rho([u, u']) = [\rho(u), \rho(u')]$ pour obtenir que ρ est une représentation. Cela se déduit du fait qu'on peut le vérifier seulement sur la base de L, et par la propriété (C_m). Les propriétés (a) et (b) se déduisent alors facilement de (A_m) et (B_m). $\square$

Lemme 4.24 (Lemme 3)**.** *Si $t \in T_m \cap J$, alors t_m la composante de degré m de t appartient à I.*

Démonstration. On sait que t_m s'écrit $t_m = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_{\Sigma(i)}$ où $\Sigma(i)$ est de longueur m. On se donne alors $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$ le morphisme d'algèbres de Lie donné par le lemme précédent, et on lui applique la propriété universelle de l'algèbre enveloppante, qui nous donne le morphisme d'algèbres $\widetilde{\rho} : \mathfrak{U} \to \mathrm{End}(\mathfrak{S})$, et on en déduit alors le morphisme d'algèbres $\widehat{\rho} : \mathfrak{T} \to \mathrm{End}(\mathfrak{S})$ vérifiant $J \subset \ker(\widehat{\rho})$. On a donc $\widehat{\rho}(t) = 0$. D'autre part, si, $\Sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, $\widehat{\rho}(u_\Sigma)(1) = \widehat{\rho}(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_n})(1) = \widehat{\rho}(u_{i_1}) \circ \cdots \circ \widehat{\rho}(u_{i_n})(1) = f(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes f(u_{i_n} \otimes 1) \ldots) = f(u_{i_1} \otimes \cdots \otimes f(u_{i_{n-1}} \otimes v_{i_n}) \ldots) = v_{i_1} \ldots v_{i_n} + w$ où $w \in S_{n-1}$ grâce au lemme précédent. Ainsi, $\widehat{\rho}(t)(1) = 0$ et la composante de degré m de $\widehat{\rho}(t)(1)$ est exactement $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_{\Sigma(i)}$, et grâce à la somme directe, on obtient $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_{\Sigma(i)} = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^r \lambda_i u_{\Sigma(i)} = t_m \in I$. $\square$

On peut maintenant déduire du Lemme 3 la démonstration du théorème PBW.

Démonstration. D'après la remarque 4.5, il ne reste plus qu'a montrer l'injectivité. Soit $t \in T_m$ tel que $\omega(t + I) = 0$, on veut donc alors montrer que $t + I = 0$, i.e. $t \in I$. Or $\omega(t + I) = \varphi(t)$ donc on a $\varphi(t) = 0$, et d'autre part t s'écrit $t = t_0 + \cdots + t_m$ où $t_k \in T^k$. Ainsi, $\varphi(t) = \varphi_0(t_0) + \cdots + \varphi_m(t_m)$, et donc, grâce à la somme directe $\mathfrak{G} = \bigoplus_{m=0}^\infty G^m$, on obtient $\varphi_k(t_k) = 0$ pour tout k compris entre 0 et m. Avec $\varphi_m(t_m) = \pi(t_m) + U_{m-1}$, pour $m \in \mathbb{N}$, on en est revenu à montrer que pour $m \in \mathbb{N}$ et $t_m \in T^m$, si $\pi(t_m) \in U_{m-1}$, alors $t_m \in I$.

$\pi(t_m) \in U_{m-1}$ nous donne l'existence de $t_{m-1} \in T_{m-1}$ tel que $\pi(t_m) = \pi(t_{m-1})$, or ceci implique que $t_m - t_{m-1} \in J$ et on rappelle que $t_m - t_{m-1} \in T_m$ par définition. Ainsi, d'après le Lemme 3, la composante de degré m de $t_m - t_{m-1}$ appartient à I, or $t_m \in T^m$ et $t_{m-1} \in T_{m-1}$ donc la composante en question est exactement t_m, ce qui conclut la preuve du théorème PBW. $\square$

4.4 Deuxième démonstration

On rappelle que dans toute la suite, $\{u_i,\, i \in K\}$ est une base de L où K est totalement ordonné, on garde également l'ensemble des notations introduites, notamment I pour l'idéal tel que $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}/I$, J celui tel que $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/J$, et π la projection dans $\mathfrak{U}$. D'autre part, on appellera *monôme* ou plus précisément *monôme de degré* n un élément $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$. On démontre maintenant le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt sous la forme suivante, d'une façon différente de la précédente démonstration.

Théorème 4.25 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *L'ensemble*

$$\{1\} \cup \left\{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + J \mid n \in \mathbb{N}^*, i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(n)\right\}$$

forme une base de $\mathfrak{U}$.

Définition 4.26. Étant donné $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} \in \mathfrak{T}$ on définit, pour $j < k$,

$$\eta_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i(j) \leq i(k) \\ 1 & \text{si} \quad i(j) > i(k). \end{cases}$$

On peut alors définir l'*index* de $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$, noté $\mathrm{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)})$ comme :

$$\mathrm{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) := \sum_{j<k} \eta_{j,k}.$$

un monôme $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ est dit *standard* si $\mathrm{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) = 0$. Par convention, on dit que 1 est standard.

Remarque 4.9. On remarque que si $\Sigma := (i(1), \ldots, i(n))$, alors le monôme $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ est standard si et seulement si Σ est croissant.

Remarque 4.10. L'index compte le nombre d'inversions qu'il y a dans le n-uplet en tant que permutation, et sa parité nous donne le signe de la permutation.

On démontre maintenant un rapide lemme préliminaire, puis on démontrera deux lemmes qui nous servirons pour la démonstration du théorème.

Lemme 4.27. *On suppose que* $i(k) > i(k+1)$. *On a alors :*

$$\mathrm{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) = \mathrm{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) + 1.$$

Démonstration. On note $u := u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$, $u' := u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ et $i' = (k, k+1) \circ i$ en tant que permutation. Ainsi, $u' = u_{i'(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i'(n)}$, et enfin, on note $\eta'_{j,k}$ les η comme définis plus haut pour u'. On vérifie facilement que l'on a alors $\eta'_{j,l} = \eta_{j,l}$ pour $j, l \notin \{k, k+1\}$. De plus, $\eta'_{j,k} = \eta_{j,k+1}$, $\eta'_{j,k+1} = \eta_{j,k}$ pour $j < k$ car par exemple, par définition,

$$\eta'_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i'(j) \leq i'(k) \\ 1 & \text{si} \quad i'(j) > i'(k) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i(j) \leq i(k+1) \\ 1 & \text{si} \quad i(j) > i(k+1) \end{cases} = \eta_{j,k+1}.$$

De la même façon, on obtient $\eta'_{k,j} = \eta_{k+1,j}$, $\eta'_{k+1,j} = \eta_{k,j}$ pour $j > k+1$. Enfin, par hypothèses, on a $\eta'_{k,k+1} = 0$ et $\eta_{k,k+1} = 1$. □

Lemme 4.28 (Lemme A). $\{1\} \cup \{u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + J \mid n \in \mathbb{N}^*, i(1) \leq i(2) \leq \cdots \leq i(n)\}$ *engendre* $\mathfrak{U}$*, c'est-à-dire que tout élément de* $\mathfrak{T}$ *est égal à une combinaison linéaire de monômes standards à un élément de* J *près.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'assertion pour les monômes d'après la remarque 2.6. On ordonne alors les monômes de la façon suivante : on ordonne d'abord par degré croissant, puis pour un même degré avec l'index. Le résultat est évident pour le premier monôme, 1, et on montre alors l'assertion pour un monôme en supposant qu'elle est vrai pour tous ceux le précédant. On se donne $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ dont on suppose qu'il n'est pas standard, et on se donne k tel que $i(k) > i(k+1)$. On a alors,

$$u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} = \\ u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes (u_{i(k)} \otimes u_{i(k+1)} - u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)}) \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}.$$

Or, $u_{i(k)} \otimes u_{i(k+1)} - u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} = [u_{i(k)}, u_{i(k+1)}] + x$ où $x \in J$. Ainsi,

$$u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} = u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes [u_{i(k)}, u_{i(k+1)}] \otimes \\ \cdots \otimes u_{i(n)} + u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}.$$

Puisque $\operatorname{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) < \operatorname{ind}(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)})$ par le lemme précédent, que le degré de $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes [u_{i(k)}, u_{i(k+1)}] \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ est strictement plus petit que celui de $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ et que $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes x \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}$ appartient à J par définition d'un idéal, on obtient le résultat. □

On a donc obtenu l'aspect générateur de la famille des monômes standards, on désire maintenant obtenir l'indépendance de cette famille. Pour cela, on considère $\mathfrak{P}_n$ l'espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des projections des monômes standards de degré n : $u_{i(1)} \ldots u_{i(n)} = u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} + J$ où $i(1) \leq \cdots \leq i(n)$ pour $n \geq 1$ et $\mathfrak{P}_0 := \mathbb{F}$, et on note $\mathfrak{P} := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{P}_k$. On montre alors le lemme suivant, qui nous donnera l'indépendance.

Lemme 4.29 (Lemme B). *Il existe une application linéaire* $\sigma : \mathfrak{T} \to \mathfrak{P}$ *vérifiant :*

$$\sigma(1) = 1,\ \sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) = u_{i(1)} \ldots u_{i(n)} \ \textit{si } i(1) \leq \cdots \leq i(n) \tag{3}$$

$$\sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)} - u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}) \\ = \sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes [u_{i(k)}, u_{i(k+1)}] \otimes \cdots \otimes u_{i(n)}). \tag{4}$$

Démonstration. On note $T^{m,j}$ le sous-espace vectoriel de T^m engendré par les monômes de degré m et d'index inférieur ou égal à j. On définit alors σ par récurrence sur (m, j) suivant l'ordre lexicographique. On impose $\sigma(1) = 1$. On suppose alors que σ est définie sur $\mathbb{F} \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^{m-1}$ et y vérifie (3) et (4), et on étend σ par linéarité à $\mathbb{F} \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^{m-1} \oplus T^{m,0}$

avec $\sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)}) = u_{i(1)} \ldots u_{i(m)}$ pour les monômes standards. Il est alors clair que σ vérifie toujours (3) et (4). On suppose alors σ définie sur $\mathbb{F} \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^{m-1} \oplus T^{m,j-1}$ et on cherche à l'étendre par linéarité à $\mathbb{F} \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^{m-1} \oplus T^{m,j}$. Soit $u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)}$ d'index $j \geq 1$, et on suppose que $i(k) > i(k+1)$. On impose alors

$$\sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)}) = \sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes u_{i(k+1)} \otimes u_{i(k)} \otimes \cdots \otimes u_{i(m)}) + \sigma(u_{i(1)} \otimes \cdots \otimes [u_{i(k)}, u_{i(k+1)}] \otimes \cdots \otimes u_{i(m)}). \quad (5)$$

Il reste à montrer que la définition (5) ne dépend pas du couple $(k, k+1)$ considéré. Soit alors $(l, l+1)$ tels que $i(l) > i(l+1)$. On a, à permutation des indices près, soit $l > k+1$, soit $l = k+1$.

Si $l > k+1$, on note $u_{i(k)} =: u$, $u_{i(k+1)} =: v$, $u_{i(l)} =: w$, et $u_{i(l+1)} =: x$. On a, par hypothèse de récurrence, pour le membre de droite de (5), en considérant le couple $(k, k+1)$:

$$\begin{aligned}\sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes w \otimes x \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes w \otimes x \otimes \cdots) = \\ \sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes [w,x] \otimes \cdots) \\ + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes [w,x] \otimes \cdots)\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{ind}(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes w \otimes x \otimes \cdots) = i - 1$ et $\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots$ est de degré $m-1$. On réalise la même opération à partir de (5) en considérant le couple $(l, l+1)$:

$$\begin{aligned}\sigma(\cdots \otimes u \otimes v \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes u \otimes v \otimes \cdots \otimes [w,x] \otimes \cdots) = \\ \sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes x \otimes w \otimes \cdots) \\ + \sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes \cdots \otimes [w,x] \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes \cdots \otimes [w,x] \otimes \cdots).\end{aligned}$$

On a bien les deux mêmes quantités.

Si $l = k+1$, on note alors $u_{i(k)} =: u$, $u_{i(k+1)} = u_{i(l)} =: v$, et $u_{i(l+1)} =: w$. Ici encore, on part du membre de droite de (5) en considérant $(k, k+1)$, et on obtient, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}&\sigma(\cdots \otimes v \otimes u \otimes w \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes w \otimes \cdots) = \\ &\sigma(\cdots \otimes v \otimes w \otimes u \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes v \otimes [u,w] \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes w \otimes \cdots) \\ &= \sigma(\cdots \otimes w \otimes v \otimes u \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [v,w] \otimes u \otimes \cdots) \\ &\quad + \sigma(\cdots \otimes v \otimes [u,w] \otimes \cdots) + \sigma(\cdots \otimes [u,v] \otimes w \otimes \cdots).\end{aligned}$$

De la même façon, en partant du membre de droite de (5) en considérant $(l, l+1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma(\cdots\otimes u\otimes w\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes u\otimes[v,w]\otimes\cdots)=\\ \sigma(\cdots\otimes w\otimes u\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes[u,w]\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes u\otimes[v,w]\otimes\cdots)\\ =\sigma(\cdots\otimes w\otimes v\otimes u\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes w\otimes[u,v]\otimes\cdots)\\ +\sigma(\cdots\otimes[u,w]\otimes v\otimes\cdots)+\sigma(\cdots\otimes u\otimes[v,w]\otimes\cdots).\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que les deux quantités sont égales, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\sigma(\cdots\otimes[v,w]\otimes u\otimes\cdots-\cdots\otimes u\otimes[v,w]\otimes\cdots\\ +\cdots\otimes v\otimes[u,w]\otimes\cdots-\cdots\otimes[u,w]\otimes v\otimes\cdots\\ +\cdots\otimes[u,v]\otimes w\otimes\cdots-\cdots\otimes w\otimes[u,v]\otimes\cdots)=0\end{aligned}\tag{6}$$

Or on sait que si $a,b\in L$, $\sigma(\cdots\otimes a\otimes b\otimes\cdots-\cdots\otimes b\otimes a\otimes\cdots)=\sigma(\cdots\otimes[a,b]\otimes\cdots)$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, (6) devient :

$$\sigma(\cdots\otimes[[v,w],u]\otimes\cdots+\cdots\otimes[v,[u,w]]\otimes\cdots+\cdots\otimes[[u,v],w]\otimes\cdots)=0.$$

Or, $[[v,w],u]+[v,[u,w]]+[[u,v],w]=[[v,w],u]+[[w,u],v]+[[u,v],w]=0$ par l'identité de Jacobi, et on conclut par bilinéarité du produit tensoriel.

La définition (5) n'est donc pas ambigüe, et on peut alors définir σ sur $\mathfrak{T}$, et il est clair que, par construction, σ vérifie (3) et (4). $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Démonstration. Le lemme A donne l'aspect générateur de la famille considérée. D'après le lemme B, on a une application linéaire $\sigma:\mathfrak{T}\to\mathfrak{P}$ vérifiant (3) et (4). Il est clair que tout élément de l'idéal J est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $u_{i(1)}\otimes\cdots\otimes u_{i(n)}-u_{i(1)}\otimes\cdots\otimes u_{i(k+1)}\otimes u_{i(k)}\otimes\cdots\otimes u_{i(n)}-u_{i(1)}\otimes\cdots\otimes[u_{i(k)},u_{i(k+1)}]\otimes\cdots\otimes u_{i(n)}$, or, par (4) ces éléments sont envoyés sur 0 par σ. Ainsi, $\ker(\sigma)\subset J$ et on obtient une application linéaire induite $\widetilde{\sigma}:\mathfrak{U}\to\mathfrak{P}$. Grâce à (3), les monômes standards $u_{i(1)}\cdots u_{i(n)}$ $(i(1)\leq\cdots\leq i(n))$ de $\mathfrak{U}$ sont envoyés par $\widetilde{\sigma}$ sur $u_{i(1)}\cdots u_{i(n)}$. Or ceux-ci sont indépendants dans $\mathfrak{P}$ car ils forment une base de $\mathfrak{P}$, ainsi, leurs antécédents dans $\mathfrak{U}$ sont aussi indépendants. $\square$

4.5 Commentaire sur les deux démonstrations

On fait ici un rapide commentaire comparant les deux démonstrations. Bien que les deux énoncés soit assez différents, on remarque que les démonstrations présentent de nombreux points semblables. Dans chacune d'elle, on s'intéresse à l'ordre des indices des monômes, et on voit apparaitre la base dont il est question pour le deuxième énoncé. On sent qu'il s'agit à chaque fois d'exprimer tout élément dans cette base, et que l'on cherche à expliquer comment réordonner les indices des monômes. Dans les deux cas on construit pour cela des applications, qui, bien que différentes, ont des similitudes. En effet, on impose à chaque fois l'image d'un monôme standard, et il est apporté des corrections à l'image d'une monôme qui n'est pas standard. On note enfin que l'identité de Jacobi est à chaque fois utilisée, et de manière fondamentale puisque le théorème est faux sans l'identité de Jacobi.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3.* Hermann, Paris, 1970.

[2] Michel Cognet. *Algèbre bilinéaire.* Bréal, 2002.

[3] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. Second printing, revised.

[4] Nathan Jacobson. *Lie algebras.* Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[5] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.